

Счёт в комплексных. Продолжение

Определение. Комплексным двойным отношением четвёрки различных точек A, B, C , называется число

$$(a, b; c, d) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}.$$

Комплексное двойное отношение точек принимает вещественное значение тогда и только тогда, когда точки A, B, C, D принадлежат одной прямой или окружности.

1. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажите, что ортоцентры треугольников ABC, ABD, ACD и BCD лежат на одной окружности.
2. На плоскости даны четыре окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A_1 и B_1 , окружности ω_2 и ω_3 — в точках A_2 и B_2 , окружности ω_3 и ω_4 — в точках A_3 и B_3 и окружности ω_4 и ω_1 — в точках A_4 и B_4 . Доказать, что если точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат на одной окружности или прямой, то и точки B_1, B_2, B_3, B_4 также лежат на одной окружности или прямой.
3. *Полезная конструкция.* Треугольник ABC вписан в единичную окружность Ω . Точки D, E, F — середины малых дуг AB, BC, AC соответственно.
(а) Докажите, что существуют числа $x, y, z \in \mathbb{C}$, такие что $a = x^2, b = y^2, c = z^2$, а также $d = -xy, e = -yz, f = -xz$. Можно ли добиться того, что во всех выражениях для d, e, f будет стоять знак $+$?
(б) Найдите, в терминах переменных x, y, z формулы для центра вписанной и центров внеписанных окружностей треугольника ABC .
4. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC , а точки M и N — середины дуг ABC и BAC его описанной окружности. Докажите, что если M, I, N коллинеарны, то $CA \cdot CB = 2 \cdot CI^2$.
5. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, пересекающая стороны AC и BC второй раз в точках M и N соответственно. Через точку M проведена прямая, параллельная стороне BC , а через точку N — прямая, параллельная стороне AC . Эти прямые пересекают сторону AB в точках P и Q . Докажите, что четыре точки M, N, P, Q лежат на одной окружности.
6. В треугольнике ABC отметили инцентр I и центр вписанной окружности O . Прямая AI пересекает (ABC) второй раз в точке P . Прямая проходящая через I и перпендикулярная AI пересекает BC в точке X . Обозначим за точку Y основание перпендикуляра из точки X на IO . Докажите, что точки A, P, X, Y лежат на одной окружности.
7. Обозначим за O центр описанной окружности треугольника ABC . На сторонах AC и AB отметили точки E и F соответственно и пересекли серединные перпендикуляры к BF и CE в точке P . Прямая OP пересекает прямые CA и AB в точках Q и R соответственно, а прямая проходящая через P и перпендикулярная EF пересекает прямые CA и AB в точках S и T соответственно. Докажите, что точки Q, R, S, T лежат на одной окружности.