

# Биномиальные коэффициенты в теории чисел

**Напоминание.** Простое число  $p$  входит в  $n!$  в степени

$$\nu_p(n!) = \left[ \frac{n}{p} \right] + \left[ \frac{n}{p^2} \right] + \left[ \frac{n}{p^3} \right] + \dots$$

- (а) Докажите, что степень вхождения простого числа  $p$  в  $n!$  равна  $\frac{n-S_n}{p-1}$ , где  $S_n$  — сумма цифр числа  $n$  в  $p$ -ичной системе счисления.

(б) *Теорема Куммера.* Пусть  $k < n$  — натуральные числа. Тогда  $\nu_p(C_n^k)$  равняется количеству переносов при сложении  $k$  и  $n-k$  в  $p$ -ичной системе счисления.
- (а) Докажите, что  $(x+1)^{p^i} \equiv x^{p^i} + 1 \pmod{p}$ .

(б) *Теорема Люка.* Пусть натуральные числа  $n > k$  имеют следующие записи в  $p$ -ичной системе счисления:  $(\overline{n_m n_{m-1} \dots n_0})_p$  и  $(\overline{k_m k_{m-1} \dots k_0})_p$ . Тогда

$$C_n^k \equiv \prod_{i=0}^m C_{n_i}^{k_i} \pmod{p}.$$

Здесь мы считаем, что  $C_b^a = 0$  при  $a > b$  (в частности при  $b = 0$ ) и  $C_0^0 = 1$ .

- Посчитайте количество нечётных чисел среди  $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$  в зависимости от  $n$ .
- Докажите, что среди чисел  $C_{2^n}^k$ , при  $k = 1, 2, 3, \dots, 2^{n-1}$  ровно одно число делится на 2, но не делится на 4.
- Пусть  $p > 2$ . Найдите все натуральные  $n$ , для которых:
  - каждое из чисел  $C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}$  делится на  $p$ ;
  - каждое из чисел  $C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}$  не делится на  $p$ .
- Найдите все натуральные  $n > 2$  такие, что  $C_{n-k}^k$  чётно для всех  $k = 1, 2, \dots, \left[ \frac{n}{2} \right]$ .

В следующих задачах мы будем считать, что  $p > 3$  — простое число.

- (а) Докажите, что имеет место сравнение

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(p-1)^2} \equiv 0 \pmod{p}.$$

- (б) Докажите, что имеет место сравнение

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1} \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

- Теорема Вольстенгольма.* Для натуральных  $a < b$  имеет место сравнение

$$(a) \quad C_{2p}^p \equiv 2 \pmod{p^3};$$

$$(b) \quad C_{bp}^{ap} \equiv C_b^a \pmod{p^3}.$$