

Биномиальные коэффициенты в теории чисел

- (а) Докажите, что степень вхождения простого числа p в $n!$ равна $\frac{n-S_n}{p-1}$, где S_n — сумма цифр числа n в p -ичной системе счисления.

(б) *Теорема Куммера.* Пусть $k < n$ — натуральные числа. Тогда $\nu_p(C_n^k)$ равняется количеству переносов при сложении k и $n-k$ в p -ичной системе счисления.
- (а) Докажите, что $(x+1)^{p^i} \equiv x^{p^i} + 1 \pmod{p}$.

(б) *Теорема Люка.* Пусть натуральные числа $n > k$ имеют следующие записи в p -ичной системе счисления: $(n_m n_{m-1} \dots n_0)_p$ и $(k_m k_{m-1} \dots k_0)_p$. Тогда

$$C_n^k \equiv \prod_{i=0}^m C_{n_i}^{k_i} \pmod{p}.$$

Здесь мы считаем, что $C_b^a = 0$ при $a > b$ (в частности при $b = 0$) и $C_0^0 = 1$.

- Докажите, что среди чисел $C_{2^n}^k$, при $k = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$ ровно одно число делится на 2, но не делится на 4.
- Пусть $p > 2$. Найдите все натуральные n , для которых:
 - каждое из чисел $C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}$ делится на p ;
 - каждое из чисел $C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}$ не делится на p .
- Найдите все натуральные числа $n > 2$ такие, что C_{n-k}^k чётно для всех $k = 1, 2, \dots, [\frac{n}{2}]$.
- Пусть n, k — натуральные числа. Докажите, что

$$\sum_{i \equiv k \pmod{p-1}} C_{\frac{p^n-1}{p-1}}^i \equiv \sum_{i \equiv k \pmod{p-1}} C_n^i \pmod{p}.$$

В следующих задачах мы будем считать, что $p > 3$ — простое число.

- (а) Докажите, что имеет место сравнение

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(p-1)^2} \equiv 0 \pmod{p}.$$

- (б) Докажите, что имеет место сравнение

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1} \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

- Теорема Вольстенхоля.* Для натуральных $a < b$ имеет место сравнение

- $C_{2p}^p \equiv 2 \pmod{p^3}$;
- $C_{bp}^{ap} \equiv C_b^a \pmod{p^3}$.

- Блоха прыгает по вещественной прямой начиная в точке 0. Каждую минуту она либо совершает прыжок на 1 влево или вправо, либо остаётся на месте. Через $p-1$ минут блоха должна снова оказаться в 0. Обозначим через $f(p)$ количество различных путей блохи, удовлетворяющих этим условиям. Какой остаток имеет $f(p)$ по модулю p ?