Счёт в комплексных. База

Фундамент. Основная идея состоит в том, что есть однозначное соответствие между точками на плоскости и комплексными числами. Мы выбираем ноль и направление вещественной и мнимой осей. Тогда каждой точки плоскости соответствует некоторое комплексное число. Далее мы будем обозначать маленькой буквой a комплексное число, отвечающее соответствующей точке A.

Основа. Умножение на комплексное число — это поворотная гомотетия.

Простейшие формулы:

- $\rho(A,B) = |a-b| \iff \rho(A,B)^2 = (a-b)(\bar{a}-\bar{b})$,
- $\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = \operatorname{Arg}\left(\frac{d-c}{b-a}\right)$.
- $AB \parallel CD$ тогда и только тогда, когда: $\frac{a-b}{c-d} \in \mathbb{R} \iff \frac{a-b}{c-d} = \frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{d}}$.
- Коллинеарность точек A, B, C: $\frac{a-b}{a-c} \in \mathbb{R} \iff \frac{a-b}{a-c} = \frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{a}-\bar{c}}$.
- $AB \perp CD$ тогда и только тогда, когда: $\frac{a-b}{c-d} \in i\mathbb{R} \iff \frac{a-b}{c-d} = -\frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{d}}$.
- Наиболее общее уравнение прямой: $\bar{a}z + a\bar{z} + \lambda = 0, \quad a \in \mathbb{C}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.
- Уравнение окружности с центром в точке A и радиусом $R \in \mathbb{R}$:
  $|z-a| = R \iff (z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = R^2$.
- Деление точкой C отрезка AB в отношении $\lambda \in \mathbb{R}$ к 1: $c = \frac{a+\lambda b}{1+\lambda}$.
- Точка пересечения медиан треугольника ABC: $m = \frac{1}{3}(a+b+c)$.

Единичной окружностью Ω будем называть окружность с центром в начале координат и радиусом 1. Уравнение этой окружности имеет очень простой вид: $z\bar{z} = 1$, то есть $\bar{z} = \frac{1}{z}$. Таким образом, при работе с единичной окружностью очень легко выражать сопряженные переменные через исходные. Многие тождества сильно упрощаются, если в них присутствуют лежащие на единичной окружности переменные.

Пример: если треугольник ABC вписан в Ω, то его ортоцентр имеет координату $h = a+b+c$.

Принципы успешного счёта.

- Активно пользуйтесь геометрическими преобразованиями и симметриями задачи. В частности, не надо считать одно и то же выражение несколько раз, если оно отличается просто переобозначением точек.
- Старайтесь, по возможности, факторизовать выражения на скобки и сокращать большие дроби.

- Не надо постоянно пересчитывать выражения, боясь ошибиться, но имеет смысл отслеживать размерность выражений и наличие в них симметрии (если есть).

НЕЗАПИСАННЫЕ / НЕДОСЧИТАННЫЕ ДО ЛОГИЧЕСКОГО ЗАВЕРШЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПРИНИМАТЬСЯ НЕ БУДУТ.

1. Проверьте следующие формулы:
(а) Уравнение хорды AB окружности Ω: $z + ab\bar{z} = a + b$.
(б) Уравнение касательной к окружности Ω, построенной в точке A: $z + a^2\bar{z} = 2a$.
(в) Точка C пересечения касательных к окружности Ω, построенных в точках A и B: $c = \frac{2ab}{a+b}$.
(г) Ортогональная проекция H точки M на хорду AB окружности Ω: $h = \frac{1}{2}(a + b + m - ab\bar{m})$.

2. В результате поворота на 90° вокруг точки O отрезок AB перешел в A_1B_1. Докажите, что медиана OM треугольника OAB_1 перпендикулярна прямой A_1B.

3. Точка D — проекция ортоцентра треугольника ABC на касательную к окружности (ABC) в точке A, точка M — середина BC. Докажите, что треугольник ADM равнобедренный.

4. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Обозначим через H_a, H_b, H_c, H_d ортоцентры треугольников BCD, ACD, ABD, ABC соответственно. Докажите, что прямые AH_a, BH_b, CH_c, DH_d пересекаются в одной точке.

5. Вне треугольника ABC построили на сторонах квадраты $BCDE$, $CAFG$, и $ABHI$. Точки Q, P таковы, что $GCDQ$ и $EBHP$ — параллелограммы. Докажите, что APQ равнобедренный с углом при вершине равным 90°.

6. В треугольник ABC вписана окружность с центром в точке I и касающаяся сторон CA, AB в точках E, F. Точки G и H симметричны относительно I точкам E и F соответственно. Пусть Q — точка пересечения прямой GH со стороной BC, а M — середина стороны BC. Докажите, что $IQ \perp IM$.

7. На сторонах выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABC_1, BCD_1, CDE_1, DEF_1, EFA_1 и FAB_1. Оказалось, что треугольник $B_1D_1F_1$ правильный. Докажите, что треугольник $A_1C_1E_1$ также правильный.

8. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке Y. Обозначим за X точку внутри $ABCD$, такую что $\measuredangle ADX = \measuredangle BCX < 90^\circ$ и $\measuredangle DAX = \measuredangle CBX < 90^\circ$. Докажите, что $\measuredangle AYB = 2 \cdot \measuredangle ADX$.