

Инверсия + симметрия

Дан треугольник ABC . *Инверсией + симметрией* относительно вершины A будем называть композицию инверсии с центром в A и радиусом $\sqrt{AB \cdot AC}$ и осевой симметрии относительно биссектрисы угла A .

При этом преобразовании меняются местами много хороших объектов, связанных с треугольником. Например:

- вершины B и C ;
- основание высоты из вершины A и точка, диаметрально противоположная A в (ABC) ;
- точки I и I_a , точки I_b и I_c .

Полезная мысль. Если при инверсии + симметрии относительно вершины A треугольника ABC точка P перешла в Q , то треугольники ABP и AQC подобны и одинаково ориентированы.

Пример. Прямая, соединяющая A с точкой касания полувписанной окружности со стороны вершины A , и прямая, соединяющая A с точкой касания вневписанной окружности, — изогонали относительно угла A .

- (а) Докажите, что центр вписанной окружности I лежит на отрезке, соединяющем точки касания полувписанной окружности со сторонами AB и AC .

(б) Определим точки Шалтая и Болтая как точки пересечения двух окружностей (вы знаете каких). Докажите, что точка Шалтая лежит на медиане, а точка Болтая — на симедиане.

(в) Во что переходит серединный перпендикуляр к стороне BC при инверсии + симметрии относительно вершины A ?
- Дан треугольник ABC . Точки D и E — пересечения биссектрисы из вершины A с прямой BC и окружностью (ABC) соответственно. Окружность, построенная на DE как на диаметре, вторично пересекает окружность (ABC) в точке F . Докажите, что AF — симедиана треугольника.
- В треугольнике ABC симедиана, проведённая из вершины A , пересекает окружность (ABC) в точке L . Точка D диаметрально противоположна A в (ABC) , точка E на прямой BC такова, что AE — касательная к (ABC) , точка F симметрична середине отрезка AL относительно точки L . Докажите, что точки A, D, E, F лежат на одной окружности.

4. Окружность с центром в точке O , лежащей на биссектрисе угла A треугольника ABC , касается отрезка BC в точке P и описанной окружности треугольника ABC в точке Q . Докажите, что AO — биссектриса угла PAQ .
5. В трапеции $ABCD$ боковые стороны AB и CD пересекаются в точке E , а диагонали AC и BD — в точке F . Окружности, описанные около треугольников AEC и BED , пересекаются в точке G . Докажите, что углы AEF и DEG равны.
6. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC . Окружность Эйлера треугольника ABC пересекается с окружностью (BOC) в точках P и Q . Докажите, что $\angle BAP = \angle CAQ$.
7. В углы B и C треугольника ABC вписаны непересекающиеся окружности ω_1 и ω_2 с центрами P и Q соответственно. Оказалось, что $\angle BAQ = \angle CAP$. Докажите, что окружность, касающаяся ω_1 и ω_2 внешним образом и проходящая через A , касается и описанной окружности треугольника ABC .
8. В треугольнике ABC симедианы, проведённые из вершин B и C , пересекают стороны AC и AB в точках D и E соответственно. Точки P и Q — середины отрезков BD и CE соответственно. Докажите, что $\angle PCB = \angle QBC$.
9. На плоскости нарисован треугольник ABC и точка, не лежащая на прямой, содержащей его стороны, и на окружности (ABC) . Алёна умеет по произвольной точке X рисовать образ X при изогональном сопряжении относительно треугольника ABC и образ X при инверсии + симметрии относительно любой из вершин ABC . Какое наибольшее число различных точек может отметить Алёна?