

Когда результат процесса не зависит от его хода

Diamond lemma. Дан ориентированный граф G с конечным или бесконечным множеством вершин. Будем называть вершину v *потомком* вершины u , если существует путь из u в v по стрелкам (в частности, любая вершина является своим потомком). Если есть стрелка непосредственно из u в v , то вершину v назовем *ребёнком* вершины u .

Предположим, что в графе G выполнены два условия:

- (1) все пути по стрелкам в графе G конечны (в частности, нет циклов);
- (2) у любых двух детей любой вершины графа G есть общий потомок.

Докажите, что у любой вершины графа G существует единственный *терминальный* потомок, т. е. потомок, из которого не выходит ни одной стрелки.

1. В ряд стоит 100 коробок, в самой левой из них лежит 100 спичек. За ход разрешается из любой коробки переложить одну спичку в соседнюю справа коробку при условии, что в исходной коробке останется не меньше спичек, чем получится в той, куда мы добавили спичку. Процесс останавливается, когда больше нельзя сделать ни одного хода. Докажите, что результат процесса не зависит от порядка операций.
2. На доске выписаны натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$. За ход разрешается взять пару чисел, ни одно из которых не делится на другое, и заменить их на их НОД и НОК.
 - (а) Докажите, что как бы мы ни действовали, мы не сможем проворачивать эту операцию бесконечно много раз.
 - (б) Докажите, что как бы мы ни действовали, мы закончим одним и тем же множеством чисел.
3. На экране компьютера сгенерирована некоторая конечная последовательность нулей и единиц. С ней можно производить следующую операцию: набор цифр «01» заменять на набор цифр «1 000 000». Докажите, что процесс рано или поздно закончится и что финальная последовательность цифр не зависит от порядка операций.
4. На доске выписаны положительные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$, где n — натуральное число. За ход разрешается взять любые два выписанные на доске числа x и y и заменить их значением выражения $xy/(x+y)$. После $n-1$ операций останется одно число. Докажите, что это число не зависит от порядка операций.

5. В некоторых клетках бесконечной клетчатой полосы стоят фишки, причём в одной клетке может быть несколько фишек (всего фишек конечное число). За одну операцию разрешается выбрать клетку с как минимум двумя фишками и переложить две фишки оттуда в соседние клетки: одну влево, другую вправо. Докажите, что вне зависимости от порядка операций процесс
- (а) всегда закончится;
 - (б) финальное распределение не зависит от порядка операций;
 - (в) число операций не зависит от их порядка.
6. (*Chip firing game*) На занятие кружка пришли n школьников и принесли с собой суммарно меньше чем C_n^2 печенек. Каждую минуту один из школьников раздаёт по одной своей печенье всем остальным. Докажите, что
- (а) в какой-то момент у каждого школьника на руках будет строго меньше $(n - 1)$ печенки;
 - (б) финальное распределение печенек не зависит от хода процесса.