Когда результат процесса не зависит от его хода

Diamond lemma. Дан ориентированный граф G с конечным или бесконечным множеством вершин. Будем называть вершину v *потомком* вершины u, если существует путь из u в v по стрелкам (в частности, любая вершина является своим потомком). Если есть стрелка непосредственно из u в v, то вершину v назовем *ребёнком* вершины u.
Предположим, что в графе G выполнены два условия:
(1) все пути по стрелкам в графе G конечны (в частности, нет циклов);
(2) у любых двух детей любой вершины графа G есть общий потомок.
Докажите, что у любой вершины графа G существует единственный *терминальный* потомок, т. е. потомок, из которого не выходит ни одной стрелки.

1. Завершите доказательство diamond-леммы.
Предположим противное: пусть существуют вершины, у которых больше одного терминального потомка. Будем называть все такие вершины плохими. *Тогда у любой плохой вершины есть …*

2. В ряд стоит 100 коробок, в самой левой из них лежит 100 спичек. За ход разрешается из любой коробки переложить одну спичку в соседнюю справа коробку при условии, что в исходной коробке останется не меньше спичек, чем получится в той, куда мы добавили спичку. Процесс останавливается, когда больше нельзя сделать ни одного хода. Докажите, что результат процесса не зависит от порядка операций.

3. На доске выписаны натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. За ход разрешается взять пару чисел, ни одно из которых не делится на другое, и заменить их на их НОД и НОК.
(а) Докажите, что как бы мы ни действовали, мы не сможем проворачивать эту операцию бесконечно много раз.
(б) Докажите, что как бы мы ни действовали, мы закончим одним и тем же множеством чисел.

4. (*Chip firing game*) На занятие кружка пришли n школьников и принесли с собой суммарно меньше чем C_n^2 печенек. Каждую минуту один из школьников раздаёт по одной своей печеньке всем остальным. Докажите, что
(а) в какой-то момент у каждого школьника на руках будет строго меньше $(n-1)$ печеньки;
(б) финальное распределение печенек не зависит от хода процесса.

5. На бесконечной в обе стороны полосе из клеток, пронумерованных целыми числами, лежит несколько фишек (возможно, по нескольку в одной клетке). Есть два типа операций:

(1) снять по одной фишке с клеток с номерами k и $k+1$ и добавить фишку в клетку с номером $k+2$;

(2) снять две фишки из клетки с номером k и добавить по фишке в клетки с номерами $k-2$ и $k+1$. Докажите, что

(а) операции когда-то прекратятся;

(б) терминальное состояние не зависит от порядка операций.

6. В вершинах пятиугольника расставлены целые числа, сумма которых положительна. За одну операцию разрешается выбрать какую-нибудь вершину A с отрицательным числом (скажем, a), прибавить a к числам в двух соседних вершинах, а число в вершине A заменить на $(-a)$.

(а) Докажите, что рано или поздно все числа станут неотрицательными.

(б) Докажите, что финальная расстановка чисел и количество операций не зависят от хода процесса.

7. На плоскости отмечены n точек в *супер-общем положении*: никакие три не лежат на одной прямой, и никакие четыре – на одной окружности. Выпуклая оболочка этих точек изначально разрезана на треугольники с вершинами в отмеченных точках. За одну операцию разрешается выбрать в разрезании два смежных треугольника ABC и ADC с условием $\angle ABC + \angle ADC > 180°$, стереть отрезок AC и нарисовать отрезок BD, тем самым получив новое разрезание на треугольники. Докажите, что

(а) операции когда-нибудь закончатся;

(б) финальная триангуляция не зависит от операций;

(в) операций будет строго меньше чем C_n^2.