

Оцениваем конфигурацию

1. На белой плоскости нарисована чёрная клякса — не обязательно выпуклый многоугольник. Каждую минуту происходит следующее: каждая точка плоскости перекрашивается в тот цвет, который преобладает в круге радиуса 1 с центром в ней (все точки перекрашиваются одновременно). Докажите, что через несколько минут вся плоскость станет белой.
2. По прямому шоссе в одном направлении едут две машины со скоростью 60 км/ч. Изначальное расстояние между машинами не меньше 2 км. Вдоль шоссе стоит несколько светофоров. Каждый светофор минуту горит зелёным, минуту — красным. Докажите, что одна машина никогда не догонит другую.
3. Есть набор из 2001 карточки с написанными на них натуральными числами от 1 до 2001. В начале игры у первого игрока все карточки с нечётными числами, у второго — с чётными. Игроки ходят по очереди, начинает первый. За раунд игрок, делающий ход, выкладывает одну из своих карточек на стол; его оппонент после этого выкладывает одну из своих карточек. Тот, у кого число больше, получает очко. Игра заканчивается после 1000 раундов. Какое максимальное количество очков может гарантированно набрать каждый из игроков?
4. На столе лежит бесконечное количество пустых шкатулок. Двое играют в следующую игру: первый игрок за ход раскладывает две печеньки в любые шкатулки на столе (можно обе печеньки в одну), а второй съедает содержимое одной шкатулки. За какое наименьшее количество шагов первый игрок сможет после своего хода оставить шкатулку, в которой будет хотя бы 10 печенек?
5. На белой клетчатой плоскости изначально n клеток закрашены чёрным. Каждую минуту каждая клетка плоскости смотрит на своих соседей справа и сверху, и если оба соседа одного цвета, а она — другого, то она в этот цвет и перекрашивается (все перекрашивания происходят одновременно). Докажите, что через n минут чёрных клеток на доске не останется.
6. В некоторых точках натурального ряда расставлены машины, в каждой точке — не более одной. Известно, что изначально для каждого натурального n в точках $1, 2, 3, \dots, n$ находится не более чем $\lfloor n/2 \rfloor$ машин. Каждую секунду машины одновременно пытаются проехать на 1 вперёд: если точка, куда хочет проехать машина, свободна, то она проезжает; если занята, то остаётся на месте и сигналиит. Докажите, что для каждой машины существует момент времени, начиная с которого она будет ехать без остановки.
7. Даны натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$. Итоги года оцениваются по n показателям, причём показатель с номером i может принимать любые натуральные значения от 1 до a_i . Год считается *тяжёлым*, если все показатели, за исключением не более чем одного, строго меньше, чем в предшествующем году. Докажите, что если $\sum \frac{1}{a_i} \leq \frac{1}{2}$, то могло так случиться, что каждый год — тяжёлый.