

Изогональное сопряжение в четырёхугольнике

Теорема. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечена точка P . Тогда следующие условия эквивалентны:

- $\angle APB + \angle CPD = 180^\circ$;
- проекции P на прямые AB , BC , CD , DA лежат на одной окружности;
- существует точка, изогонально сопряжённая P относительно $ABCD$.

1. Докажите равносильность
(а) первых двух условий; (б) последних двух условий.
2. В остроугольном неравностороннем треугольнике ABC отметили ортоцентр H и центр описанной окружности O . Серединный перпендикуляр к отрезку AH пересекает стороны AB и AC в точках X и Y . Докажите, что прямая OA — биссектриса угла XOY .
3. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Обозначим через I_A , I_B , I_C и I_D центры вписанных окружностей треугольников DAB , ABC , BCD и CDA соответственно. Оказалось, что $\angle BI_A A + \angle CI_A I_D = 180^\circ$. Докажите, что $\angle BI_B A + \angle CI_B I_D = 180^\circ$.
4. Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности с центром в точке I . На отрезках AI и CI отмечены точки X и Y так, что $2\angle XBY = \angle ABC$. Докажите, что $2\angle XDY = \angle ADC$.
5. Внутри окружности ω отмечена точка K . Рассматриваются хорды AB окружности ω такие, что $\angle AKB = 90^\circ$. Докажите, что проекции точки K на всевозможные хорды AB лежат на одной окружности.
6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагональ BD не является биссектрисой ни угла ABC , ни угла CDA . Точка P внутри четырёхугольника $ABCD$ такова, что $\angle PBC = \angle DBA$ и $\angle PDC = \angle BDA$. Докажите, что $ABCD$ вписан тогда и только тогда, когда $AP = CP$.
7. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту AH и диаметр AD описанной окружности. Точка I — центр вписанной окружности. Докажите, что $\angle BIH = \angle CID$.
8. Точка O — центр описанной окружности остроугольного неравностороннего треугольника ABC . Прямая CO пересекает высоту из вершины A в точке K . Точки P и M — середины отрезков AK и AC соответственно. Прямые PO и BC пересекаются в точке X . Окружность (BCM) пересекает прямую AB в точках B и Y . Докажите, что четырёхугольник $BXOY$ вписанный.
9. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполнено равенство $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Точка X внутри $ABCD$ такова, что $\angle XAB = \angle XCD$ и $\angle XBC = \angle XDA$. Докажите, что $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$.