

Около систем счисления

1. Имеется 100 палочек, из которых можно сложить 100-угольник. Может ли случиться, что ни из какого меньшего числа этих палочек нельзя сложить невырожденный многоугольник?
2. Докажите, что каждое натуральное число n может быть единственным образом представлено в виде

$$n = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + \dots,$$

где $0 \leq a_i \leq i$ для всех i .

3. $P(x)$ — непостоянный многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что числа 1 и 2 являются его корнями. Докажите, что у многочлена найдётся коэффициент, меньший -1 .
4. (а) Какое наименьшее число гирь необходимо для того, чтобы иметь возможность взвесить любое число граммов от 1 до 100 на чашечных весах, если гири можно класть на одну чашу весов?
(б) То же самое, только гири можно класть на обе чаши весов.
5. У продавца и покупателя в сумме 1999 рублей монетами и купюрами в 1, 5, 10, 50, 100, 500 и 1000 рублей. Кот в мешке стоит целое число рублей, причём денег у покупателя достаточно. Докажите, что покупатель сможет купить кота, получив причитающуюся сдачу.
6. Существуют ли 100 прямоугольников, из которых можно составить любой клетчатый прямоугольник со сторонами, не превосходящими 1000?
7. Имеется цепочка из 150 звеньев, каждое из которых весит 1 грамм. Какое наименьшее число звеньев надо расковать так, чтобы из образовавшихся частей можно было составить все веса от 1 до 150 грамм (раскованное звено тоже весит 1 грамм)?
8. Есть n гирь, никакие две гири не весят одинаково.
(а) За какое наименьшее количество взвешиваний на чашечных весах можно определить самую лёгкую гирю?
(б) За какое наименьшее количество взвешиваний на чашечных весах можно определить самую тяжёлую гирю?