

Около систем счисления

1. Докажите, что каждое натуральное число n может быть единственным образом представлено в виде

$$n = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + \dots,$$

где $0 \leq a_i \leq i$ для всех i .

2. $P(x)$ — непостоянный многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что числа 1 и 2 являются его корнями. Докажите, что у многочлена найдётся коэффициент, меньший -1 .
3. У продавца и покупателя в сумме 1999 рублей монетами и купюрами в 1, 5, 10, 50, 100, 500 и 1000 рублей. Кот в мешке стоит целое число рублей, причём денег у покупателя достаточно. Докажите, что покупатель сможет купить кота, получив причитающуюся сдачу.
4. Существуют ли 100 прямоугольников, из которых можно составить любой клетчатый прямоугольник со сторонами, не превосходящими 1000?
5. Имеется цепочка из 150 звеньев, каждое из которых весит 1 грамм. Какое наименьшее число звеньев надо расковать так, чтобы из образовавшихся частей можно было составить все веса от 1 до 150 грамм (раскованное звено тоже весит 1 грамм)?
6. В три сосуда налито по целому числу литров воды. В любой сосуд разрешается перелить столько воды, сколько в нём уже содержится, из любого другого сосуда. Каждый из сосудов может вместить всю имеющуюся в них воду. Докажите, что можно несколькими переливаниями освободить один из сосудов.
7. Есть n гирь, никакие две гири не весят одинаково. За какое наименьшее количество взвешиваний на чашечных весах можно определить самую тяжёлую гирю?