

Очный отборочный тур. Решения

1. Пусть S — наименьшее (по включению) множество натуральных чисел, удовлетворяющее следующим свойствам:

- $2 \in S$;
- если $n^2 \in S$, то $n \in S$;
- если $n \in S$, то $(n+5)^2 \in S$.

Определите, какие числа принадлежат множеству S .

Ответ: все натуральные числа, кроме 1 и чисел, кратных 5.

Решение. Рассмотрим множество $\bar{S}$, состоящее из всех натуральных чисел, кроме 1 и чисел кратных 5. Докажем, что $\bar{S}$ удовлетворяет свойствам из условия.

- По определению множества $\bar{S}$, $2 \in \bar{S}$.
- Предположим $n^2 \in \bar{S}$ и $n \notin \bar{S}$. Поскольку $n \notin \bar{S}$, то либо $n = 1$, либо $n = 5k$, для некоторого натурального k . Но тогда n^2 либо равно 1, либо делится на 5, то есть в любом случае $n^2 \notin \bar{S}$, противоречие.
- Предположим $n \in S$ и $(n+5)^2 \notin \bar{S}$. Тогда $(n+5)^2$ делится на 5 (поскольку $(n+5)^2 \neq 1$), откуда $n+5$ делится на 5, то есть n делится на 5, поэтому $n \notin \bar{S}$, противоречие.

Таким образом, $\bar{S}$ удовлетворяет свойствам из условия.

Пусть M — произвольное подмножество натуральных чисел, удовлетворяющее свойствам из условия. Применяя свойства 2, 3 получаем, что если $k \in M$, то $k+5 \in M$. Докажем, что M содержит числа 2, 3, 4, 6. Из этого будет следовать, что числа вида $2+5n, 3+5n, 4+5n, 6+5n$ для всех натуральных n лежат в M , то есть $M \supset \bar{S}$. Но тогда $\bar{S} = S$ в силу минимальности S .

Имеем $(2+5)^2 = 49 \in M$, откуда $7 \in M$. Число $(49+5)^2 \in M$ заканчивается цифрой 6. Также для любого натурального m число 6^{2^m} также заканчивается цифрой 6, то есть $6^{2^m} \equiv 54^2 \pmod{5}$. Для достаточно большого m , $6^{2^m} > 54^2$, следовательно, $6^{2^m} \in M$. Воспользовавшись m раз свойством 2, получим, что $6 \in M$.

Также $6+2 \cdot 5 = 16 \in M$, откуда $4 \in M$, и $6+5 \cdot 15 = 81 \in M$, откуда $9 \in M$, поэтому $3 \in M$. Что и требовалось доказать.

2. У Вани и Лёши есть абсолютно одинаковые коллекции, состоящие из различных марок, и у каждого по 10 больших альбомов для их хранения. Ваня и Лёша разложили свои марки по своим альбомам так, что не осталось пустых альбомов. Для любого Ваниного и любого Лёшиного альбома верно, что если

в них нет одинаковой марки, то суммарно в них находится хотя бы 10 разных марок. Какое наименьшее количество марок могло быть в коллекции?

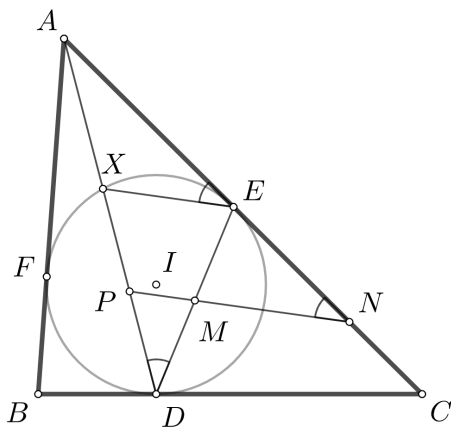
Ответ: 50.

Решение. Оценка. Если в каждом наборе хотя бы по 5 марок, то всего в коллекции не менее 50 марок. Предположим, существует набор, в котором меньше 5 марок. Рассмотрим альбом с минимальным количеством марок. Не умаляя общности, можно считать, что это один из наборов Лёши. Пусть в нём $k < 5$ марок. Тогда он не пересекается хотя бы с $10 - k$ наборами Вани. В каждом из этих наборов хотя бы $10 - k$ марок. Получаем, что у всего в Ваниных наборах хотя бы $(10 - k)^2 + k^2$ марок. Для всех натуральных $k < 5$ выполнено неравенство $(10 - k)^2 + k^2 > 50$. Получаем, что в коллекции хотя бы 50 марок.

Пример. Пусть и Ваня и Лёша разложили свои марки так, что в каждом альбоме лежит по 5 марок. Тогда в любых двух непересекающихся наборах ровно 10 марок, и всего марок 50.

3. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC , CA и AB в точках D , E и F соответственно, точка I — центр этой окружности. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки I на прямую AD , а M — середина отрезка DE . Пусть N — точка пересечения прямых PM и AC . Докажите, что $DN \parallel EF$.

Решение. Обозначим через X вторую точку пересечения прямой AD с вписанной окружностью треугольника ABC . Тогда P — середина отрезка DX , так как перпендикуляр, опущенный из центра окружности на хорду делит её пополам. Отрезок PM — средняя линия в треугольнике XDE и, следовательно, $PM \parallel XE$.



Углы XEA и PNA равны как соответственные при этих параллельных прямых. Так как AC касается вписанной окружности, то $\angle XEA = \angle XDE$. Следовательно, четырёхугольник $PDNE$ вписанный, откуда $\angle DNA = \angle EPA$.

Точки A, E, I, P, F лежат на окружности, построенной на AI как на диаметре, откуда $\angle EPA = \angle EFA$. Но $\angle EFA = \angle AEF$. Таким образом, $\angle AEF = \angle AND$, откуда следует нужная параллельность.

4. Найдите все простые числа p и q , удовлетворяющие равенству

$$p(p+1)(p^2+1) = q^2(q^2+q+1) + 2025.$$

Ответ: $(p, q) = (7, 5)$.

Решение. Левую часть равенства можно переписать в виде $\frac{p^5-p}{p-1}$. По малой теореме Ферма числитель делится на 5 (или можно просто перебрать остатки по модулю 5), поэтому если $p-1$ не делится на 5, то $p(p+1)(p^2+1)$ делится на 5. В этом случае $q^2(q^2+q+1)$ делится на 5. Поскольку q^2+q+1 не делится на 5 (что можно доказать несложным перебором остатков), получаем, что q^2 делится на 5, то есть $q = 5$. Подставив $q = 5$, получим, что $p = 7$.

Осталось разобрать случай, когда $p-1$ делится на 5. Тогда $p \equiv -1 \pmod{5}$, откуда $p(p+1)(p^2+1) \equiv -1 \pmod{5}$. Отсюда получаем, что $q^2(q^2+q+1) \equiv -1 \pmod{5}$. Но это невозможно, что легко видеть, если перебрать остатки по модулю 5.

q	0	1	2	3	4
$\frac{q}{q^2(q^2+q+1)}$	1	3	3	2	1

5. Последовательность положительных чисел $a_1, a_2, a_3 \dots$ удовлетворяют равенству

$$2a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} = a_n + \frac{n^2 - 3n + 2}{2}$$

для всех целых $n \geq 3$. Найдите наименьшее значение суммы

$$\frac{(a_1 + 1)^2}{a_2} + \dots + \frac{(a_{999} + 1)^2}{a_{1000}}.$$

Ответ: 500499.

Решение. Заметим, что

$$(a_k + 1)^2 + a_{k+1}^2 \geq 2(a_k + 1)a_{k+1}.$$

Поскольку по условию $a_i > 0, \forall i$ получаем, что

$$\frac{(a_k + 1)^2}{a_{k+1}} \geq 2(a_k + 1) - a_{k+1}.$$

Тогда

$$\frac{(a_1 + 1)^2}{a_2} + \dots + \frac{(a_{999} + 1)^2}{a_{1000}} \geq 2(a_1 + 1) - a_2 + 2(a_2 + 1) - a_3 + \dots + 2(a_{999} + 1) - a_{1000} =$$

$$= 2a_1 + a_2 + \dots + a_{999} - a_{1000} + 2 \cdot 999 = \frac{1000^2 - 3 \cdot 1000 + 2}{2} + 2 \cdot 999 = 500499$$

Получаем, что

$$\frac{(a_1 + 1)^2}{a_2} + \dots + \frac{(a_{999} + 1)^2}{a_{1000}} \geq 500499.$$

Проверим, что равенство достигается. Заметим, что последовательность $a_i = i$ удовлетворяет равенству из условия. Действительно $1 + \frac{n(n-1)}{2} = n + \frac{n^2 - 3n + 2}{2}$ для всех $n \geq 3$. Для последовательности $a_i = i$,

$$\frac{(a_1 + 1)^2}{a_2} + \dots + \frac{(a_{999} + 1)^2}{a_{1000}} = \frac{1000 \cdot 1001}{2} - 1 = 500499.$$

Замечание. Последовательность имеет вид $a_k = c \cdot 2^{k-1} + k$ для действительного $c \geq 0$.

6. Дана доска размером 100×100 клеток. Мышь находится в левой верхней клетке, а кусок сыра — в правой нижней. Мышь хочет добраться до сыра. За один шаг мышь может переместиться в соседнюю по стороне клетку. На любое общее ребро двух соседних клеток можно поместить разделитель, который запрещает прямое перемещение между этими клетками. Размещение разделителей называется *добрым*, если мышь всё ещё может достичь сыра после их установки. Найдите наименьшее n такое, что при любом *добром* размещении 2023 разделителей мышь может добраться до сыра не более чем за n шагов.

Ответ: 2220.

Решение. Пример. Разместим разделители, как показано на рисунке 1.

Любой путь из S в F обязан пройти через клетки A , B и C .

- Путь из S в A требует не меньше $2 \cdot 43 = 86$ шагов.
- Путь из A в B требует не меньше $100 - 43 - 1 = 56$ шагов.
- Путь из B в C требует не меньше $19 \cdot 100 + 1 = 1901$ шага.
- Путь из C в F требует не меньше $(100 - 21 - 1) + (100 - 1) = 177$ шагов.

Таким образом, в приведённом примере нужно не менее $86 + 56 + 1901 + 177 = 2220$ шагов.

Покажем, что при любом размещении 2023 разделителей мышь может добраться от S до F не более чем за 2220 шагов.

Будем считать, что мышь движется из центра одной клетки в центр соседней. Пусть P — кратчайший путь по центрам клеток от центра S до центра F .

Рассмотрим любой вертикальный столбец сетки, не первый и не последний. Горизонтальные разделители в этом столбце делят его на сегменты. Кратчайший путь P может войти в сегмент и выйти из него не более одного раза

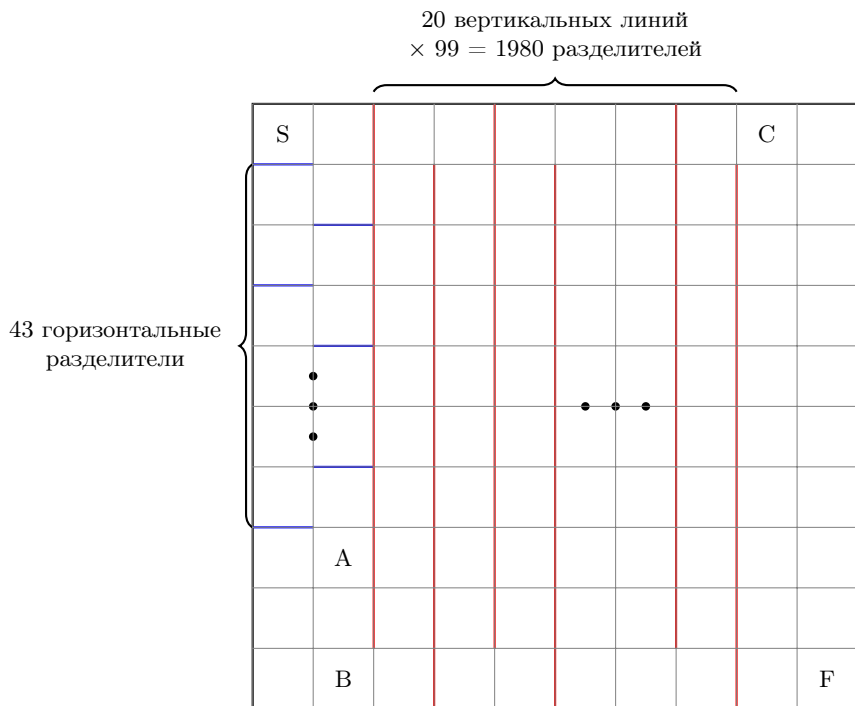


Рис. 1: Пример размещения разделителей. Точки S и F обозначают старт и финиш. Синие линии — горизонтальные разделители, красные — вертикальные.

(иначе путь можно было бы сократить). Количество сегментов в столбце на 1 больше количества горизонтальных разделителей в нем. Следовательно, суммарная длина горизонтальных перемещений пути P в данном столбце не превышает количества разделителей в нем плюс 1.

Отдельно рассмотрим крайние столбцы.

- В первом столбце (содержащем S) путь не “входит” в сегмент со стартом (клеткой S), поэтому оценка уменьшается до (число разделителей) $+ \frac{1}{2}$.
- В последнем столбце (содержащем F) путь не “выходит” из сегмента с финишем (клеткой F), оценка также (число разделителей) $+ \frac{1}{2}$.

Таким образом, сумма длин всех горизонтальных частей пути P по всем столбцам не превышает общего числа горизонтальных разделителей плюс 98 (для 98 обычных столбцов) плюс $2 \times \frac{1}{2} = 1$ (для двух крайних). Итого длина горизонтальных участков пути не превосходит числа горизонтальных разделителей плюс 99.

Аналогичная оценка верна для вертикальных участков пути. Складывая, получаем, что длина P не больше общего числа разделителей плюс 198, то

есть 2221.

Раскрасим доску в шахматном порядке, присвоив клетке S белый цвет. Клетка D также будет белой. Так как каждый ход меняет цвет клетки, путь из S в F должен состоять из чётного числа шагов. Следовательно, путь длиной 2221 шаг невозможен. Значит, существует путь длиной не более 2220 шагов.