Дистанционный отбор. Решения

Задача 1.1. Сколько существует 12-значных натуральных чисел-палиндромов, делящихся на 33? Число называется палиндромом, если оно выглядит одинаково при прочтении слева направо и справа налево.

Ответ: 300 000.

Решение. Пусть некоторое шестизначное число, удовлетворяющее условию задачи, имеет вид $\overline{abcdeffedcba}$. Для делимости данного числа на 33 необходимо, чтобы оно делилось на 3 и на 11.

Как известно, число кратно 11 тогда и только тогда, когда его знакопеременная сумма цифр равна нулю. В нашем случае сумма цифр равна 0 тождественно, так как симметрично расположенные цифры будут браться с разными знаками. Таким образом, условие делимости на 11 выполнено автоматически.

Далее, согласно признаку делимости на 3, число кратно 3 тогда и только тогда, когда его сумма цифр кратна 3. Сумма цифр нашего числа равна удвоенной сумме цифр числа $\overline{abcdef}$. Поэтому искомых чисел будет ровно столько, сколько есть чисел вида $\overline{abcdef}$ делящихся на 3. То есть, всего $900\,000 : 3 = 300\,000$ чисел. □

Задача 1.2. Сколько существует 14-значных натуральных чисел-палиндромов, делящихся на 33? Число называется палиндромом, если оно выглядит одинаково при прочтении слева направо и справа налево.

Ответ: 3 000 000.

Задача 1.3. Сколько существует 14-значных натуральных чисел-палиндромов, делящихся на 99? Число называется палиндромом, если оно выглядит одинаково при прочтении слева направо и справа налево.

Ответ: 1 000 000.

Задача 1.4. Сколько существует 12-значных натуральных чисел-палиндромов, делящихся на 99? Число называется палиндромом, если оно выглядит одинаково при прочтении слева направо и справа налево.

Ответ: 100 000.

Задача 2.1. Про натуральные числа a и b известно, что

$$\max(a,b) = (a-b)^2, \quad \min(a,b) = 21 \cdot \text{НОД}(a,b).$$

Найдите НОК(a,b).

Ответ: 10164.

Решение. Пусть, не умоляя общности $a \geqslant b$. Обозначим НОД чисел a и b за d и представим данные числа в виде $a = d \cdot a'$, $b = d \cdot b'$. Тогда условие задачи переписывается в виде

$$d\,a' = d^2(a'-b')^2, \quad d\,b' = 21d.$$

Значит, $b' = 21$ и $a' = d(a'-b')^2$. Заметим, что числа a' и b' взаимно простые по построению, а значит, взаимно просты и числа a' и $a'-b'$. Тогда условие задачи выполнено только в случае равенства $a'-b'$ единице. Значит, $a' = b'+1 = 22$ и $d = a'/(a'-b')^2 = 22$. Отсюда НОК$(a,b) = d \cdot a' \cdot b' = 22 \cdot 22 \cdot 21 = 3840$. $\square$

Задача 2.2. Про натуральные числа a и b известно, что

$$\max(a,b) = (a-b)^2, \quad \min(a,b) = 15 \cdot \text{НОД}(a,b).$$

Найдите НОК(a,b).

Ответ: 3840.

Задача 2.3. Про натуральные числа a и b известно, что

$$\max(a,b) = (a-b)^2, \quad \min(a,b) = 35 \cdot \text{НОД}(a,b).$$

Найдите НОК(a,b).

Ответ: 45360.

Задача 2.4. Про натуральные числа a и b известно, что

$$\max(a,b) = (a-b)^2, \quad \min(a,b) = 33 \cdot \text{НОД}(a,b).$$

Найдите НОК(a,b).

Ответ: 38148.

Задача 3.1.

Целые числа n и k таковы, что уравнения $x^{101}+nx-51=0$ и $x^{101}+kx-52=0$ имеют общий корень. Найдите наибольшее возможное значение произведения nk.

Ответ: 2756.

Решение. Вычтем из первого уравнения второе. Имеем $(n-k)x+1=0$. Так как числа n и k целые, то равенство возможно либо при $n-k=1$ и $x=-1$, либо при $n-k=-1$ и $x=1$.

В первом случае $-1-n-51=0$. Значит, $n=-52$, $k=-53$, и произведение чисел равно $52\cdot 53=2756$.

Во втором случае $1+n-51=0$. Следовательно, $n=50$, $k=51$, и произведение чисел равно $50\cdot 51=2550$.

Сравнивая два решения, находим, что максимальное значение произведения nk равно 2756; и достигается для уравнений $x^{101}-52x-51=0$ и $x^{101}-53x-52=0$, имеющих общий корень равный -1. $\square$

Задача 3.2. Целые числа n и k таковы, что уравнения $x^{103}+nx-53=0$ и $x^{103}+kx-54=0$ имеют общий корень. Найдите наибольшее возможное значение произведения nk.

Ответ: 2970.

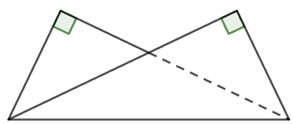
Задача 3.3. Целые числа n и k таковы, что уравнения $x^{105}+nx-55=0$ и $x^{105}+kx-56=0$ имеют общий корень. Найдите наибольшее возможное значение произведения nk.

Ответ: 3192.

Задача 3.4. Целые числа n и k таковы, что уравнения $x^{107}+nx-57=0$ и $x^{107}+kx-58=0$ имеют общий корень. Найдите наибольшее возможное значение произведения nk.

Ответ: 3422.

Задача 4.1. Прямоугольник с отношением большей стороны к меньшей, равным x, согнули по диагонали, как показано на рисунке. Известно, что площадь получившегося невыпуклого пятиугольника составляет 23/36 от площади исходного прямоугольника. Найдите x.



Ответ: 1,5.

Решение. Будем считать, без ограничения общности, что длина меньшей стороны прямоугольника равна 1, тогда длина большей стороны равна x, а длина диагонали квадрата по теореме Пифагора равна $\sqrt{1+x^2}$. В равнобедренном треугольнике AMC проведём высоту MH. Прямоугольные треугольники MHC и ABC подобны, так что $CH/MH = BC/AB = x$, откуда

$$MH = \frac{CH}{x} = \frac{x^2+1}{2x},$$

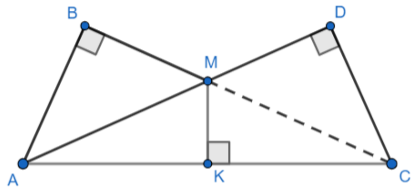
и площадь треугольника AMC равна

$$\frac{1}{2} \cdot AC \cdot MH = \frac{x^2+1}{4x}.$$

Ясно, что площадь пятиугольника равна разности площади исходного прямоугольника и площади треугольника AMC, то есть равна

$$x - \frac{x^2+1}{4x} = \frac{3x^2-1}{4x}.$$

Так как отношение найденной площади к площади исходного прямоугольника по условию равно 23/36, приходим к уравнению $\frac{3x^2-1}{4x^2} = 23/36$. Решая его, получаем единственное положительное решение $x = 1.5$.



□

Задача 4.2. Прямоугольник с отношением большей стороны к меньшей, равным x, согнули по диагонали, как показано на рисунке. Известно, что площадь получившегося невыпуклого пятиугольника составляет 13/18 от площади исходного прямоугольника. Найдите x.

Ответ: 3.

Задача 4.3. Прямоугольник с отношением большей стороны к меньшей, равным x, согнули по диагонали, как показано на рисунке. Известно, что площадь получившегося невыпуклого пятиугольника составляет 37/50 от площади исходного прямоугольника. Найдите x.

Ответ: 5.

Задача 4.4. Прямоугольник с отношением большей стороны к меньшей, равным x, согнули по диагонали как показано на рисунке. Известно, что площадь получившегося невыпуклого пятиугольника составляет $47/64$ от площади исходного прямоугольника. Найдите x.

Ответ: 4.

Задача 5.1. Про натуральные числа a и b известно, что $15ab^2$ и $35ab$ — точные кубы. Найдите наименьшее возможное значение выражения $a+b$.

Ответ: 588.

Решение. Заметим, что число является кубом тогда и только тогда, когда все простые множители входят в него в степени кратной тройке. Посмотрим на степени вхождения простых чисел $3, 5, 7$ в выражения $15ab^2$ и $35ab$. Обозначим степень вхождения простого числа p в натуральное число n за $\operatorname{ord}_p(n)$. Тогда имеем

- $$1+\operatorname{ord}_3(a)+2\operatorname{ord}_3(b)\equiv 0 \pmod 3, \quad \operatorname{ord}_3(a)+\operatorname{ord}_3(b)\equiv 0 \pmod 3.$$

  Вычитая из первого уравнения второе, получаем, что $\operatorname{ord}_3(b)\equiv 2 \pmod 3$, а значит, $\operatorname{ord}_3(a)\equiv 1 \pmod 3$.

- $$1+\operatorname{ord}_5(a)+2\operatorname{ord}_5(b)\equiv 0 \pmod 3, \quad 1+\operatorname{ord}_5(a)+\operatorname{ord}_5(b)\equiv 0 \pmod 3.$$

  Снова вычитая из первого уравнения второе, получаем, что $\operatorname{ord}_5(b)\equiv 0 \pmod 3$ и $\operatorname{ord}_5(a)\equiv 2 \pmod 3$.

- $$\operatorname{ord}_7(a)+2\operatorname{ord}_7(b)\equiv 0 \pmod 3, \quad 1+\operatorname{ord}_7(a)+\operatorname{ord}_7(b)\equiv 0 \pmod 3.$$

  Здесь вычитание из первого уравнения второго приводит к следюущему результату $\operatorname{ord}_7(b)\equiv 1 \pmod 3$ и $\operatorname{ord}_7(a)\equiv 1 \pmod 3$.

Таким образом, число a кратно как минимум $3^1\cdot 5^2\cdot 7^1=525$, а число b кратно как минимум $3^2\cdot 7^1=63$. При этом $a=525$ и $b=63$ подходят. Значит, минимальная сумма равна $525+63=588$. $\square$

Задача 5.2. Про натуральные числа a и b известно, что $35ab^2$ и $15ab$ — точные кубы. Найдите наименьшее возможное значение выражения $a+b$.

Ответ: 672.

Задача 5.3. Про натуральные числа a и b известно, что $15ab^2$ и $21ab$ — точные кубы. Найдите наименьшее возможное значение выражения $a + b$.

Ответ: 490.

Задача 5.4. Про натуральные числа a и b известно, что $21ab^2$ и $15ab$ — точные кубы. Найдите наименьшее возможное значение выражения $a + b$.

Ответ: 560.

Задача 6.1. В городе живёт 2500 человек попарно разного роста. Однажды некоторые из них решили принять участие в игре «Третий НЕ лишний» со следующими правилами. Собравшиеся встали в круг так, чтобы их рост увеличивался по часовой стрелке (то есть сразу за самым низким жителем по часовой стрелке стоит второй по росту, за вторым — третий, ..., за самым высоким — самый низкий). Ведущий (не участвующий в конкурсе) начинает называть игроков по порядку по часовой стрелке, начиная с самого низкого. Каждый третий названный житель, начиная с самого низкого, остаётся на месте, а остальные выбывают (то есть сначала выбывает второй и третий из названных игроков, за ними пятый и шестой, и т. д.). Выбывший игрок немедленно покидает круг, и впоследствии ведущий его не называет. Игра продолжается, пока не останется один игрок, который объявляется победителем. Известно, что в конкурсе участвовало N жителей ($1 \leqslant N \leqslant 2500$), и победителем оказался самый высокий из них. Укажите количество возможных значений N.

Например, если собралось 10 жителей и они пронумерованы по возрастанию роста числами от 1 до 10, то выбывают они в следующем порядке: 2, 3, 5, 6, 8, 9, 1, 4, 10 и победителем становится игрок №7, а если изначально пришёл только 1 житель, то он автоматически считается победителем.

Ответ: 13.

Решение. Добавим мысленно двух человек в круг перед самым низким, и занумеруем людей по порядку. Кроме того, поменяем правила игры: пусть отныне каждый третий названный житель остаётся на месте, а остальные выбывают (то есть сначала выбывает первый и второй, за ними четвертый и пятый, и т. д.) Такая игра ничего не поменяет с точки зрения победителя (так как вымышленные люди уйдут первыми, и игра станет равносильна старой). Однако теперь следить за выбывающими сильно проще. Действительно, после первого прохождения круга останутся только люди с порядковыми номерами кратными 3, после второго прохождения только люди с номера кратными 9 и т.д. Перед прохождением последнего круга может остаться либо один человек, либо два человека. В любом случае побеждает последний из них. Поэтому, чтобы самый высокий человек стал победителем необходимо и достаточно, чтобы он имел номер 3^n или $2 \cdot 3^n$, где n целое неотрицательное. Значит, изначальное число N должно иметь вид $3^n - 2$ или $2 \cdot 3^n - 2$. Осталось заметить, что чисел такого вида в интервале от 1 до 2500 ровно 13 штук, так как $3^7 - 2 < 2500 < 3^8 - 2$ и $2 \cdot 3^6 - 2 < 2500 < 2 \cdot 3^7 - 2$). Поэтому, ответ равен 13. □

Задача 6.2. В городе живёт 1500 человек попарно разного роста. Однажды некоторые из них решили принять участие в игре «Третий НЕ лишний» со следующими правилами. Собравшиеся встали в круг так, чтобы их рост увеличивался по часовой стрелке (то есть сразу за самым низким жителем по часовой стрелке стоит второй по росту, за вторым — третий, ..., за самым высоким — самый низкий). Ведущий (не участвующий в конкурсе) начинает называть игроков по порядку по часовой стрелке, начиная с самого низкого. Каждый третий названный житель, начиная с самого низкого, остаётся на месте, а остальные выбывают (то есть сначала выбывает второй и третий из названных игроков, за ними пятый и шестой, и т. д.). Выбывший игрок немедленно покидает круг, и впоследствии ведущий его не называет. Игра продолжается, пока не останется один игрок, который объявляется победителем. Известно, что в конкурсе участвовало N жителей ($1 \leqslant N \leqslant 1500$), и победителем оказался самый высокий из них. Укажите количество возможных значений N.

Например, если собралось 10 жителей и они пронумерованы по возрастанию роста числами от 1 до 10, то выбывают они в следующем порядке: 2, 3, 5, 6, 8, 9, 1, 4, 10 и победителем становится игрок №7, а если изначально пришёл только 1 житель, то он автоматически считается победителем.

Ответ: 12.

Задача 6.3. В городе живёт 1000 человек попарно разного роста. Однажды некоторые из них решили принять участие в игре «Третий НЕ лишний» со следующими правилами. Собравшиеся встали в круг так, чтобы их рост увеличивался по часовой стрелке (то есть сразу за самым низким жителем по часовой стрелке стоит второй по росту, за вторым — третий, ..., за самым высоким — самый низкий). Ведущий (не участвующий в конкурсе) начинает называть игроков по порядку по часовой стрелке, начиная с самого низкого. Каждый третий названный житель, начиная с самого низкого, остаётся на месте, а остальные выбывают (то есть сначала выбывает второй и третий из названных игроков, за ними пятый и шестой, и т. д.). Выбывший игрок немедленно покидает круг, и впоследствии ведущий его не называет. Игра продолжается, пока не останется один игрок, который объявляется победителем. Известно, что в конкурсе участвовало N жителей ($1 \leqslant N \leqslant 1000$), и победителем оказался самый высокий из них. Укажите количество возможных значений N.

Например, если собралось 10 жителей и они пронумерованы по возрастанию роста числами от 1 до 10, то выбывают они в следующем порядке: 2, 3, 5, 6, 8, 9, 1, 4, 10 и победителем становится игрок №7, а если изначально пришёл только 1 житель, то он автоматически считается победителем.

Ответ: 11.

Задача 6.4. В городе живёт 700 человек попарно разного роста. Однажды некоторые из них решили принять участие в игре «Третий НЕ лишний» со следующими правилами. Собравшиеся встали в круг так, чтобы их рост увеличивался по часовой стрелке (то есть сразу за самым низким жителем по часовой стрелке стоит второй по росту, за вторым — третий, ..., за самым высоким — самый низкий). Ведущий (не участвующий в конкурсе) начинает называть игроков по порядку по часовой стрелке, начиная с самого низкого. Каждый третий названный житель, начиная с самого низкого, остаётся на месте, а остальные выбывают (то есть сначала выбывает второй и третий из названных игроков, за ними пятый и шестой, и т. д.). Выбывший игрок немедленно покидает круг, и впоследствии ведущий его не называет. Игра продолжается, пока не останется один игрок, который объявляется победителем. Известно, что в конкурсе участвовало N жителей ($1 \leqslant N \leqslant 700$), и победителем оказался самый высокий из них. Укажите количество возможных значений N.

Например, если собралось 10 жителей и они пронумерованы по возрастанию роста числами от 1 до 10, то выбывают они в следующем порядке: 2, 3, 5, 6, 8, 9, 1, 4, 10 и победителем становится игрок №7, а если изначально пришёл только 1 житель, то он автоматически считается победителем.

Ответ: 10.

Задача 7.1. Найдите количество натуральных чисел n в промежутке от 1 до 1000 таких, что уравнение $x^2 = y^2 + n$ имеет хотя бы одно решение в натуральных числах.

Ответ: 748.

Решение. Для начала заметим, что остаток при делении n на 4 отличен от 2. Действительно, квадраты натуральных чисел дают только остатки 0 или 1 при делении на 4, поэтому разность квадратов не может быть сравнима с 2 по модулю 4. Далее, если $n = 1$, то $x^2 - y^2 = 1$, а значит, $x - y = 1$ и $x + y = 1$, то есть $x = 1$, $y = 0$, что не подходит под условие. Если же $n = 4$, то $x^2 - y^2 = 4$ и тогда либо $x - y = 2$ и $x + y = 2$ (то есть снова $y = 0$), либо $x - y = 1$ и $x + y = 4$ и числа x, y нецелые.

Докажем, что все остальные числа на промежутке от 1 до 1000 подходят. Если $n \neq 1$ и нечетно, то можно взять $x = \frac{(n+1)}{2}$ и $y = \frac{(n-1)}{2}$, так как

$$\frac{(n+1)^2}{4} - \frac{(n-1)^2}{4} = \frac{2n \cdot 2}{4} = n.$$

Если же $n \neq 4$ и делится на 4, то можно взять $x = \frac{n}{4} + 1$ и $y = \frac{n}{4} - 1$, так как

$$\left(\frac{n}{4} + 1\right)^2 - \left(\frac{n}{4} - 1\right)^2 = \frac{2n}{4} \cdot 2 = n.$$

Таким образом, всего представимых таким образом чисел $1000 \cdot \frac{3}{4} - 2 = 748$. $\square$

Задача 7.2. Найдите количество натуральных чисел n в промежутке от 1 до 1200 таких, что уравнение $x^2 = y^2 + n$ имеет хотя бы одно решение в натуральных числах.

Ответ: 898.

Задача 7.3. Найдите количество натуральных чисел n в промежутке от 1 до 1400 таких, что уравнение $x^2 = y^2 + n$ имеет хотя бы одно решение в натуральных числах.

Ответ: 1048.

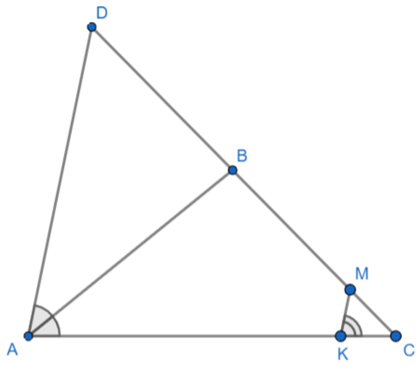
Задача 7.4. Найдите количество натуральных чисел n в промежутке от 1 до 1600 таких, что уравнение $x^2 = y^2 + n$ имеет хотя бы одно решение в натуральных числах.

Ответ: 1198.

Задача 8.1. В треугольнике ABC на сторонах AC и BC отметили точки K и M соответственно. Известно, что $AK = 8$, $KC = 1$ а отношение BM/MC равно 3. Кроме того, известно, что $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle MKC$. Найти длину отрезка KM.

Ответ: 1,25.

Решение. Проведём через точку A прямую, параллельную MK. Пусть она пересекает луч CB в точке D. Из параллельности AD и MK следует, что $DM/MC = AK/KC = 8$, так что $DM = 8MC$, и, поскольку $BM = 3MC$, получаем, что $DB = 5MC$. Так как $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle MKC$, то AB — биссектриса треугольника DAC. По свойству биссектрисы имеем $AD/AC = DB/BC = \frac{5}{4}$, а значит, $AD = \frac{5}{4} \cdot 9 = \frac{45}{4}$. Наконец, из подобия треугольников MCK и DCA следует, что $MK/DA = CK/CA = 1/9$, поэтому $MK = \frac{DA}{9} = \frac{5}{4} = 1{,}25$.



□

Задача 8.2. В треугольнике ABC на сторонах AC и BC отметили точки K и M соответственно. Известно, что $AK = 9$, $KC = 1$ а отношение BM/MC равно 3. Кроме того, известно, что $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle MKC$. Найти длину отрезка KM.

Ответ: 1,5.

Задача 8.3. В треугольнике ABC на сторонах AC и BC отметили точки K и M соответственно. Известно, что $AK = 14$, $KC = 2$ а отношение BM/MC равно 4. Кроме того, известно, что $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle MKC$. Найти длину отрезка KM.

Ответ: 1,2.

Задача 8.4. В треугольнике ABC на сторонах AC и BC отметили точки K и M соответственно. Известно, что $AK = 16$, $KC = 2$ а отношение BM/MC равно 4. Кроме того, известно, что $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle MKC$. Найти длину отрезка KM.

Ответ: 1,6.

Задача 9.1. Петя и Вася играют в следующую игру. Сначала Петя называет некоторое натуральное число, большее 4000. После этого игроки по очереди называют натуральные числа, меньшие названного на предыдущем шаге, но при этом не меньшие его половины. Проигрывает тот, кто вынужден назвать число 1. Какое минимальное число может сказать в начале игры Петя, чтобы гарантировано победить независимо от действий Васи?

Ответ: 6143.

Решение. Уберем временно требование того, что первое названное число должно превышать 4000. Докажем индукцией по целым неотрицательным k, что если первый игрок называет на первом ходу число $n \in N$ такое, что $3 \cdot 2^{k-1} - 1 < n < 3 \cdot 2^k - 1$, то он проигрывает, а если называет $n = 3 \cdot 2^k - 1$ — то выигрывает.

База, $k = 0$:
Если первый игрок называет первым ходом 1, то он автоматически проигрывает. Если же он называет 2, то второй игрок вынужден назвать 1, и первый игрок становится победителем.

Переход. Пусть верно для $k = m$. Докажем для $k = m + 1$.
Если первый игрок назовёт число $3 \cdot 2^{m+1} - 1$, то независимо от названного другим игроком числа на промежутке от $3 \cdot 2^m$ до $3 \cdot 2^{m+1} - 2$, первый игрок сможет назвать на следующем ходу число $3 \cdot 2^m - 1$ и победить по предположению индукции. Если же первый игрок назовёт число n на промежутке от $3 \cdot 2^m - 1 < n < 3 \cdot 2^{m+1} - 1$, то второй игрок сможет самостоятельно назвать число $3 \cdot 2^m - 1$ и победить. Переход индукции доказан.

Возвращаясь к нашей задаче, для победы Пете необходимо назвать минимальное число вида $3^n - 2 > 4000$. Нетрудно убедиться, что $3^{10} - 2 < 4000 < 3^{11} - 2$, поэтому ответ на задачу равен $3^{11} - 2 = 6143$. □

Задача 9.2. Петя и Вася играют в следующую игру. Сначала Петя называет некоторое натуральное число, большее 1000. После этого игроки по очереди называют натуральные числа, меньшие названного на предыдущем шаге, но при этом не меньшие его половины. Проигрывает тот, кто вынужден назвать число 1. Какое минимальное число может сказать в начале игры Петя, чтобы гарантировано победить независимо от действий Васи?

Ответ: 1535.

Задача 9.3. Петя и Вася играют в следующую игру. Сначала Петя называет некоторое натуральное число, большее 500. После этого игроки по очереди называют натуральные числа, меньшие названного на предыдущем шаге, но при этом не меньшее его половины. Проигрывает тот, кто вынужден назвать число 1. Какое минимальное число может сказать в начале игры Петя, чтобы гарантировано победить независимо от действий Васи?

Ответ: 767.

Задача 9.4. Петя и Вася играют в следующую игру. Сначала Петя называет некоторое натуральное число, большее 2000. После этого игроки по очереди называют натуральные числа, меньшие названного на предыдущем шаге, но при этом не меньшие его половины. Проигрывает тот, кто вынужден назвать число 1. Какое минимальное число может сказать в начале игры Петя, чтобы гарантировано победить независимо от действий Васи?

Ответ: 3071.

Задача 10.1. Обозначим через $\sigma(n)$ количество натуральных делителей натурального числа n. Рассмотрим уравнение $\sigma(n) + \sigma(2n) = 22$. Если расположить его решения по возрастанию, то чему равно седьмое решение?

Ответ: 304.

Решение. Пусть степень вхождения 2 в число n равна k, то есть $n = 2^k m$, где m нечетное число. Тогда заметим, что

$$\sigma(n) = (k+1)\sigma(m) \quad \text{и} \quad \sigma(2n) = (k+2)\sigma(m).$$

Подставляя в уравнение, получаем $(2k+3)\sigma(m) = 22$. Значит, $(2k+3)$ делит 22. То есть $2k + 3 = 11$, а $\sigma(m) = 2$. Таким образом, $k = 4$, а m — простое число отличное от 2. Седьмое по возрастанию отличное от 2 простое число равно 19. Значит, ответ на задачу $2^4 \cdot 19 = 304$ □

Задача 10.2. Обозначим через $\sigma(n)$ количество натуральных делителей натурального числа n. Рассмотрим уравнение $\sigma(n) + \sigma(2n) = 26$. Если расположить его решения по возрастанию, то чему равно седьмое решение?

Ответ: 608.

Задача 10.3. Обозначим через $\sigma(n)$ количество натуральных делителей натурального числа n. Рассмотрим уравнение $\sigma(n) + \sigma(2n) = 34$. Если расположить его решения по возрастанию, то чему равно четвертое решение?

Ответ: 1408.

Задача 10.4. Обозначим через $\sigma(n)$ количество натуральных делителей натурального числа n. Рассмотрим уравнение $\sigma(n) + \sigma(2n) = 26$. Если расположить его решения по возрастанию, то чему равно шестое решение?

Ответ: 544.

Задача 11.1. Алексей выложил в ряд 15 пустых карточек. Он хочет записать на них числа от 1 до 13 без повторений (2 карточки останутся пустыми) так, чтобы для любых двух соседних непустых карточек число, написанное в карточке справа, было больше числа, написанного слева. Сколькими способами он может это сделать?

Ответ: 1 594 323.

Решение. Обратим внимание, что пустые карточки разделяют 13 непустых карточек на три группы чисел по возрастанию (возможно, какие-то группы пустые). Также заметим, что искомое число способов совпадает с числом способов расположить 13 чисел по этим трем группам. Действительно, так как числа должны возрастать внутри каждой группы, то для каждого разбиения чисел на группы существует лишь один способ упорядочить их согласно условию. Осталось заметить, что каждое из чисел можно поместить в одну из трех групп 3 способами. Поэтому ответ на задачу $3^{13} = 1\,594\,323$. $\square$

Задача 11.2. Алексей выложил в ряд 13 пустых карточек. Он хочет записать на них числа от 1 до 8 без повторений (5 карточки останутся пустыми) так, чтобы для любых двух соседних непустых карточек число, написанное в карточке справа, было больше числа, написанного слева. Сколькими способами он может это сделать?

Ответ: 1 679 616.

Задача 11.3. Алексей выложил в ряд 14 пустых карточек. Он хочет записать на них числа от 1 до 9 без повторений (4 карточки останутся пустыми) так, чтобы для любых двух соседних непустых карточек число, написанное в карточке справа, было больше числа, написанного слева. Сколькими способами он может это сделать?

Ответ: 1 953,125.

Задача 11.4. Алексей выложил в ряд 13 пустых карточек. Он хочет записать на них числа от 1 до 10 без повторений (3 карточки останутся пустыми) так, чтобы для любых двух соседних непустых карточек число, написанное в карточке справа, было больше числа, написанного слева. Сколькими способами он может это сделать?

Ответ: 1 048 576.

Задача 12.1. В треугольнике ABC проведена высота CH, причём точка H лежит внутри отрезка AB. Периметр треугольника ABC равен 60, высота CH равна 4. Радиус окружности, которая касается отрезка AH и продолжений сторон CA и CH за точки A и H соответственно, равен 20. Найдите радиус окружности, которая касается отрезка BH и продолжений сторон CB и CH за точки B и H соответственно.

Ответ: 6.

Решение. Отметим центры данных окружностей и точки их касания с прямыми, как показано на рисунке. В силу равенства отрезков касательных имеем $CM = CZ$, $AX = AM$, $HX = HZ$, так что

$$2CM = CM + CZ = CA + AX + CH + HX = P_{AHC},$$

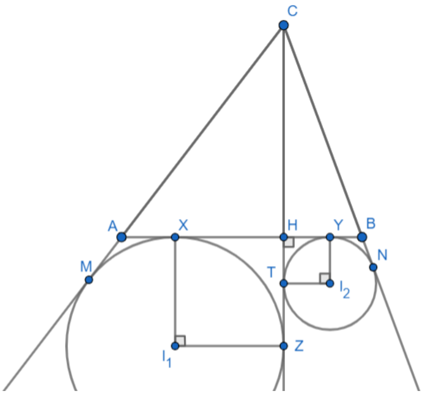
где P_{AHC} — периметр треугольника ABC. Ясно, что $XHZI_1$ — квадрат, так что радиус окружности, касающейся отрезка AH, равен

$$\frac{P_{AHC}}{2} - CH = \frac{AC + CH + AH}{2} - CH = \frac{AC + AH - CH}{2}.$$

Аналогично получаем, что радиус второй окружности равен $\frac{BC+BH-CH}{2}$. Сумма этих радиусов, таким образом, равна

$$\frac{AB + AC + BC}{2} - CH = 30 - 4 = 26.$$

Так как по условию радиус первой окружности равен 20, то радиус второй — $26 - 20 = 6$.



□

Задача 12.2. В треугольнике ABC проведена высота CH, причём точка H лежит внутри отрезка AB. Периметр треугольника ABC равен 40, высота CH равна 5. Радиус окружности, которая касается отрезка AH и продолжений сторон CA и CH за точки A и H соответственно, равен 10. Найдите радиус окружности, которая касается отрезка BH и продолжений сторон CB и CH за точки B и H соответственно.

Ответ: 5.

Задача 12.3. В треугольнике ABC проведена высота CH, причём точка H лежит внутри отрезка AB. Периметр треугольника ABC равен 60, высота CH равна 5. Радиус окружности, которая касается отрезка AH и продолжений сторон CA и CH за точки A и H соответственно, равен 12. Найдите радиус окружности, которая касается отрезка BH и продолжений сторон CB и CH за точки B и H соответственно.

Ответ: 13.

Задача 12.4. В треугольнике ABC проведена высота CH, причём точка H лежит внутри отрезка AB. Периметр треугольника ABC равен 80, высота CH равна 4. Радиус окружности, которая касается отрезка AH и продолжений сторон CA и CH за точки A и H соответственно, равен 14. Найдите радиус окружности, которая касается отрезка BH и продолжений сторон CB и CH за точки B и H соответственно.

Ответ: 22.

Задача 13.1. Пусть p — положительное вещественное решение уравнения $\{x[x]\} = 1500\{x\}$, не являющееся целым числом. Петя выписывает на доску в порядке возрастания все возможные значения $[p]$. Какое число он выписал вторым?

Целая часть $[x]$ числа x — это наибольшее целое число, не превосходящее x. Дробная часть $\{x\}$ числа x — это разность между самим числом и его целой частью.

Ответ: 3001.

Решение. Заметим, что дробная часть числа всегда не превосходит 1. Значит,

$$\{p\} < \frac{1}{1500} \quad \text{и} \quad 1500\{p\} = \{1500\{p\}\}.$$

Кроме того,

$$\{p[p]\} = \{(\{p\} + [p])[p]\} = \{\{p\}[p]\}.$$

Таким образом, у чисел $\{p\}[p]$ и $1500\{p\}$ совпадают дробные части, значит, $m = \{p\}([p] - 1500)$ — целое число. Если $[p] < 1500$ и $m < 0$, то

$$\{p\} = \frac{-m}{1500 - [p]} > \frac{1}{1500}.$$

Если $[p] = 1500$ и $m = 0$, то любое число p вида $1500 + \{p\}$, где $\{p\} < \frac{1}{1500}$, является решением. Поэтому число 1500 выписано первым. Если же $[p] > 1500$ и $m > 0$, то для того чтобы $\{p\} = \frac{m}{[p]-1500}$ было строго меньше $1/1500$ необходимо, чтобы целая часть p была хотя бы 3001. Нетрудно убедиться, что число $p = 3001 + \frac{1}{1501}$ подходит. Значит, вторым выписано число 3001. $\square$

Задача 13.2. Пусть p — положительное вещественное решение уравнения $\{x[x]\} = 2000\{x\}$, не являющееся целым числом. Петя выписывает на доску в порядке возрастания все возможные значения $[p]$. Какое число он выписал вторым?

Целая часть $[x]$ числа x — это наибольшее целое число, не превосходящее x. Дробная часть $\{x\}$ числа x — это разность между самим числом и его целой частью.

Ответ: 4001.

Задача 13.3. Пусть p — положительное вещественное решение уравнения $\{x[x]\} = 2500\{x\}$, не являющееся целым числом. Петя выписывает на доску в порядке возрастания все возможные значения $[p]$. Какое число он выписал вторым?

Целая часть $[x]$ числа x — это наибольшее целое число, не превосходящее x. Дробная часть $\{x\}$ числа x — это разность между самим числом и его целой частью.

Ответ: 5001.

Задача 13.4. Пусть p — положительное вещественное решение уравнения $\{x[x]\} = 3000\{x\}$, не являющееся целым числом. Петя выписывает на доску в порядке возрастания все возможные значения $[p]$. Какое число он выписал вторым?

Целая часть $[x]$ числа x — это наибольшее целое число, не превосходящее x. Дробная часть $\{x\}$ числа x — это разность между самим числом и его целой частью.

Ответ: 6001.

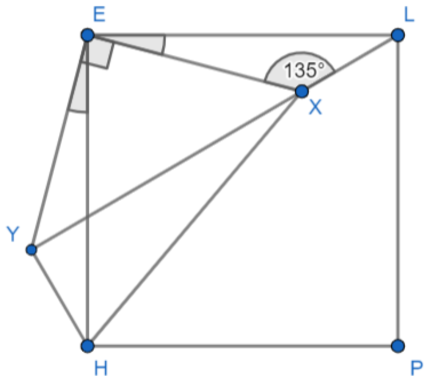
Задача 14.1. Дан квадрат $HELP$. Внутри него выбрали точку X. Оказалось, что $\angle EXL = 135°$, а длины отрезков HX и LX равны 21 и 7 соответственно. Найдите EX.

Ответ: 14.

Решение. Отложим от стороны HE во внешнюю сторону от квадрата треугольник EYH, равный треугольнику EXL, как показано на рисунке ($EX = EY$, $YH = XL$). Так как $\angle LEX = \angle HEY$, то угол XEY прямой. Кроме того, $EX = EY$, поэтому EXY — равнобедренный прямоугольный треугольник, и $\angle EXY = \angle EYX = 45°$. Значит,

$$\angle EXL + \angle EXY = 135° + 45° = 180°,$$

и точки L, X и Y лежат на одной прямой. Далее, так как треугольник EYH получается из треугольника EXL поворотом на $90°$ вокруг точки E, то $LY \perp YH$, и треугольник XYH прямоугольный. Если $EX = EY = x$, то в равнобедренном прямоугольном треугольнике $XY = x\sqrt{2}$, и по теореме Пифагора, применённой к прямоугольному треугольнику XYH, имеем $XY^2 + YH^2 = XH^2$, то есть $2x^2 + 49 = 441$, откуда $EX = x = 14$.



$\square$

Задача 14.2. Дан квадрат $HELP$. Внутри него выбрали точку X. Оказалось, что $\angle EXL = 135°$, а длины отрезков HX и LX равны 17 и 1 соответственно. Найдите EX.

Ответ: 12.

Задача 14.3. Дан квадрат $HELP$. Внутри него выбрали точку X. Оказалось, что $\angle EXL = 135°$, а длины отрезков HX и LX равны 24 и 8 соответственно. Найдите EX.

Ответ: 16.

Задача 14.4. Дан квадрат $HELP$. Внутри него выбрали точку X. Оказалось, что $\angle EXL = 135°$, а длины отрезков HX и LX равны 34 и 2 соответственно. Найдите EX.

Ответ: 24.