Диагностическая работа. Дистанционный этап.

Задача 1. У Артемия есть не более 400 шариков. Известно, что Артемий может оставить один шарик себе и разделить оставшиеся на три равные группы. Также Артемий может оставить себе 2 шарика и разделить оставшиеся на 7 равных групп. Наконец, Артемий может разделить все свои шарики на пять равных групп. Найдите наибольшее количество шариков, которое могло быть у Артемия.

Ответ: 310

Решение. Их условия следует, что если у Артемия n шариков, то $n-1$ делится на 3, $n-2$ делится на 7, а n делится на 5. Отсюда следует, что число $n+5$ должно делиться и на 3, и на 5, и на 7, а значит должно делиться на 105. Наибольшее такое число, меньшее 400, равно 310, ведь $310+5=315=105\cdot 3$, а $105\cdot 4-5$ больше 400. □

Задача 2.1. Математики, физики и химики стоят в очереди в библиотеку. Оказалось, что в очереди ровно 37 физиков, перед каждым из которых стоит химик, и ровно 9 химиков, перед каждым из которых стоит физик. Какое наименьшее число математиков может стоять в очереди?

Ответ: 27

Решение. *Оценка.* Рассмотрим очередь. Если в ней идёт 2 более физиков подряд, оставим только одного из них. Условие задачи не нарушится, и число математиков не изменится.

Теперь посмотрим на оставшихся физиков. Их не меньше 37. С другой стороны, после 9 физиков стоят химики, максимум за одним физиком никто не стоит, а так как физики не идут подряд, то за оставшимися $\geqslant 37-9-1=27$ физиками идут математики. Следовательно, математиков не меньше 27.

Пример:.Сначала поставим 37 физиков в ряд. Образуется 36 промежутков между физиками. В эти промежутки в любом порядки поставим 9 химиков и 27 математиков. □

Задача 2.2. Математики, физики и химики стоят в очереди в библиотеку. Оказалось, что в очереди ровно 38 физиков, перед каждым из которых стоит химик, и ровно 12 химиков, перед каждым из которых стоит физик. Какое наименьшее число математиков может стоять в очереди?

Ответ: 25

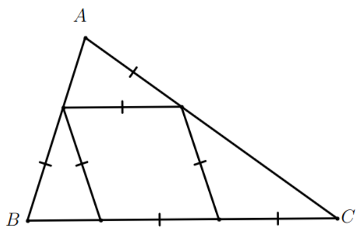
Задача 2.3. Математики, физики и химики стоят в очереди в библиотеку. Оказалось, что в очереди ровно 39 физиков, перед каждым из которых стоит химик, и ровно 15 химиков, перед каждым из которых стоит физик. Какое наименьшее число математиков может стоять в очереди?

Ответ: 23

Задача 2.4. Математики, физики и химики стоят в очереди в библиотеку. Оказалось, что в очереди ровно 40 физиков, перед каждым из которых стоит химик, и ровно 18 химиков, перед каждым из которых стоит физик. Какое наименьшее число математиков может стоять в очереди?

Ответ: 21

Задача 3. Найдите углы треугольника ABC.



Ответ: $\angle A = \angle B = 72°$, $\angle C = 36°$

Решение. Обозначим $\angle ACB = \varphi$. Четырёхугольник с равными сторонами внутри треугольника ABC — ромб, следовательно, его противоположные стороны параллельны. Несложно посчитать углы, как указано на рисунке. Запишем сумму углов треугольника ABC:

$$\left(90° - \frac{\varphi}{2}\right) + 2\varphi + \varphi = 180° \Rightarrow \varphi = 36° \Rightarrow \angle A = \angle B = 72°,\ \angle C = 36°.$$

□

Задача 4.1. Вадим задумал натуральное число. Оказалось, что сумма этого числа с его наименьшим делителем, отличным от 1, равна 3630. Найдите наименьшее число, которое мог задумать Вадим.

Ответ: 3625.

Решение. Пусть Вадим задумал число n, а p — его наименьший делитель, отличный от 1. Ясно, что p — простое число. По условию $n + p = 3630$, а значит число 3630 делится на p. Разложив на простые множители $3630 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11^2$, получаем, что p может быть равно 2, 3, 5 или 11.

Если $p = 11$, то $n = 3630 - 11 = 3619$, а поскольку 3619 делится на 7, то число 11 не является его наименьшим простым делителем. Значит, $p \leqslant 5$ и $n = 3630 - p \geqslant 3625$. Осталось проверить, что случай $p = 5$ возможен. В самом деле, если $n = 3625 = 5^3 \cdot 29$, то 5 — наименьший делитель числа n. Таким образом, наименьшим числом, которое мог задумать Вадимом, является число 3625. □

Задача 4.2. Вадим задумал натуральное число. Оказалось, что сумма этого числа с его наименьшим делителем, отличным от 1, равна 5940. Найдите наименьшее число, которое мог задумать Вадим.

Ответ: 5935.

Задача 4.3. Вадим задумал натуральное число. Оказалось, что сумма этого числа с его наименьшим делителем, отличным от 1, равна 8250. Найдите наименьшее число, которое мог задумать Вадим.

Ответ: 8245.

Задача 4.4. Вадим задумал натуральное число. Оказалось, что сумма этого числа с его наименьшим делителем, отличным от 1, равна 1320. Найдите наименьшее число, которое мог задумать Вадим.

Ответ: 1315.

Задача 5.1. У Вадима есть клетчатая доска 21×21. Он хочет разделить её клетки на прямоугольники так, чтобы среди них было ровно два «вертикальных» прямоугольника $k \times 1$ и ровно два «горизонтальных» прямоугольника $1 \times k$ для каждого чётного натурального числа k от 2 до 20, а также ровно один прямоугольник 1×1. Сколькими способами Вадим может это сделать?

Ответ: $2^{10} = 1024$

Решение. Будем доказывать по индукции более общее утверждение: «разбить доску $(2n+1) \times (2n+1)$ на прямоугольники 1×2, 1×4, …, $1 \times 2n$, 2×1, …, $2n \times 1$ так, чтобы каждого вида прямоугольников было ровно 2, и один квадрат 1×1, можно 2^n способами.»

База. Утверждение очевидно для доски 1×1.

Переход. Пусть известно, что утверждение верно для досок со стороной не более $2n - 1$. Докажем для доски со стороной $2n+1$. Рассмотрим расположение двух вертикальных прямоугольников $2n \times 1$. Заметим, что горизонтальные прямоугольники $1 \times 2n$ поместятся в квадрате только если вертикальные прямоугольники находятся в крайних левом и правом столбцах, причем один занимает нижние клетки столбца, а другой — верхние. Таких расположений вертикальных прямоугольников $2n \times 1$ два, расположение горизонтальных прямоугольников $1 \times 2n$ однозначно восстанавливается по нему. Осталось разбить доску $(2n-1) \times (2n-1)$. По предположению, это можно сделать 2^{n-1} способами, тогда способов разбить доску $(2n+1) \times (2n+1)$ $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$. $\square$

Задача 5.2. У Вадима есть клетчатая доска 19×19. Он хочет разделить её клетки на прямоугольники так, чтобы среди них было ровно два «вертикальных» прямоугольника $k \times 1$ и ровно два «горизонтальных» прямоугольника $1 \times k$ для каждого чётного натурального числа k от 2 до 18, а также ровно один прямоугольник 1×1. Сколькими способами Вадим может это сделать?

Ответ: $2^9 = 512$

Задача 5.3. У Вадима есть клетчатая доска 23×23. Он хочет разделить её клетки на прямоугольники так, чтобы среди них было ровно два «вертикальных» прямоугольника $k \times 1$ и ровно два «горизонтальных» прямоугольника $1 \times k$ для каждого чётного натурального числа k от 2 до 22, а также ровно один прямоугольник 1×1. Сколькими способами Вадим может это сделать?

Ответ: $2^{11} = 2048$

Задача 5.4. У Вадима есть клетчатая доска 25×25. Он хочет разделить её клетки на прямоугольники так, чтобы среди них было ровно два «вертикальных» прямоугольника $k \times 1$ и ровно два «горизонтальных» прямоугольника $1 \times k$ для каждого чётного натурального числа k от 2 до 24, а также ровно один прямоугольник 1×1. Сколькими способами Вадим может это сделать?

Ответ: $2^{12} = 4096$

Задача 6.1. Дан треугольник ABC. Серединные перпендикуляры, восстановленные к сторонам AB и AC, пересекают биссектрису угла $\angle BAC$ в точках P и Q соответственно. Также биссектриса $\angle BAC$ повторно пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке W. Найдите длину отрезка AW, если $BP = 10$, $CQ = 15$.

Ответ: 25

Решение. Обозначим точку пересечения серединных перпендикуляров к сторонам AB и AC через O. Тогда O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Значит, $OW = OA$ как радиусы. Также заметим, что

$$\angle OPQ = 90^\circ - \angle PAB = 90^\circ - \angle PAC = \angle OQP,$$

поэтому треугольник OPQ — равнобедренный и $OP = OQ$. Пусть T — основание перпендикуляра из O на AW. Поскольку треугольники OAW и OPQ — равнобедренные, то T — общая середина их оснований PQ и AW. Отсюда следует, что $PW = AQ$. Так как P и Q лежат на серединных перпендикулярах к сторонам AB и AC соответственно, то $AP = BP$, $AQ = CQ$. Таким образом,

$$AW = PW + AP = AP + AQ = BP + CQ = 10 + 15 = 25.$$

□

Задача 6.2. Дан треугольник ABC. Серединные перпендикуляры, восстановленные к сторонам AB и AC, пересекают биссектрису угла $\angle BAC$ в точках P и Q соответственно. Также биссектриса $\angle BAC$ повторно пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке W. Найдите длину отрезка AW, если $BP = 9$, $CQ = 13$.

Ответ: 22

Задача 6.3. Дан треугольник ABC. Серединные перпендикуляры, восстановленные к сторонам AB и AC, пересекают биссектрису угла $\angle BAC$ в точках P и Q соответственно. Также биссектриса $\angle BAC$ повторно пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке W. Найдите длину отрезка AW, если $BP = 11$, $CQ = 17$.

Ответ: 28

Задача 6.4. Дан треугольник ABC. Серединные перпендикуляры, восстановленные к сторонам AB и AC, пересекают биссектрису угла $\angle BAC$ в точках P и Q соответственно. Также биссектриса $\angle BAC$ повторно пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке W. Найдите длину отрезка AW, если $BP = 5$, $CQ = 7$.

Ответ: 12

Задача 7.1. На окружности отмечены вершины правильного 100-угольника. Какое наибольшее количество попарно неравных треугольников с вершинами в отмеченных точках можно выбрать (треугольники могут иметь общие вершины или стороны)?

Ответ: $C_{100}^3/200 + 49/2 = 833$

Решение. Данная задача имеет множество решений, мы приведём лишь одно из возможных.

Разобьём все треугольники с вершинами в отмеченных точках на группы, состоящие из равных треугольников. Заметим, что равносторонних треугольников с вершинами в отмеченных точках быть не может, так как число 100 не делится на 3. Значит, любая группа состоит либо из разносторонних треугольников, либо из равнобедренных, но не равносторонних треугольников.

Рассмотрим группу, состоящую из разносторонних треугольников с длинами сторон a, b и c (a, b, c — различные числа). Посчитаем, сколько треугольников в этой группе. Для этого заметим, что каждый такой треугольник однозначно определяется расположением своей вершины, в которой сходятся стороны длин a и b, а также порядком его двух оставшихся вершин на окружности. Значит, в такой группе 200 треугольников. Теперь рассмотрим группу, состоящую из равнобедренных, но не равносторонних треугольников. Любой треугольник этой группы однозначно определяется расположением своей вершины, в которой сходятся равные стороны. Значит, в такой группе 100 треугольников.

Несложно видеть, что групп, состоящих из равнобедренных треугольников, ровно 49 штук. Обозначим n число групп, состоящих из разносторонних треугольников. Тогда общее число треугольников во всех группах равно $200n + 100 \cdot 49$. С другой стороны, треугольник с вершинами в отмеченных точках можно выбрать $C_{100}^3 = 161700$ способами. Значит,

$$200n + 100 \cdot 49 = 161700,$$

откуда $n = 784$. Ответом на задачу является число всех групп, то есть $784 + 49 = 833$. $\square$

Задача 7.2. На окружности отмечены вершины правильного 98-угольника. Какое наибольшее количество попарно неравных треугольников с вершинами в отмеченных точках можно выбрать (треугольники могут иметь общие вершины или стороны)?

Ответ: 800

Задача 7.3. На окружности отмечены вершины правильного 94-угольника. Какое наибольшее количество попарно неравных треугольников с вершинами в отмеченных точках можно выбрать (треугольники могут иметь общие вершины или стороны)?

Ответ: 736

Задача 7.4. На окружности отмечены вершины правильного 92-угольника. Какое наибольшее количество попарно неравных треугольников с вершинами в отмеченных точках можно выбрать (треугольники могут иметь общие вершины или стороны)?

Ответ: 705

Задача 8. Даны натуральные числа x, y, удовлетворяющие равенству

$$\frac{x^2+y^2}{x+y} = 10.$$

Чему может быть равно меньшее из этих чисел?

Ответ: 4, 6, 10

Решение. Домножив обе части уравнения на $x+y$ и перенеся всё в одну сторону, получим $x^2 - 10x + y^2 - 10y = 0$. Заметим, что данное уравнение равносильно уравнению

$$(x-5)^2 + (y-5)^2 = 50.$$

Число 50 можно представить в виде суммы двух квадратов целых чисел следующими способами

$$50 = (\pm 1)^2 + (\pm 7)^2, \quad 50 = (\pm 5)^2 + (\pm 5)^2.$$

Несложный перебор показывает, что в качестве натуральных решений исходного уравнения подходят пары $(x, y) = (6, 12), (4, 12), (10, 10)$ □

Задача 9.1. В параллелограмме $ABCD$ точка E является серединой стороны BC. Точка F на отрезке DE выбрана таким образом, что отрезки AF и DE перпендикулярны. Найдите угол $\angle FBE$, если $\angle DAB = 80°$, а $\angle EDC = 35°$.

Ответ: $180° - 80° - 2 \cdot 35° = 30°$

Решение. Продлим луч DE до пересечения с лучом AB в точке T. Заметим, что треугольники CED и BET равны по стороне ($CE = BE$) и двум прилежащим углам. Значит, $DE = TE$. Тогда BE — средняя линия треугольника ATD по признаку средней линии. То есть B — середина отрезка AT. По свойству медианы прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, $BF = AT/2 = BT$. Теперь мы можем найти углы треугольника BEF. По свойству внешнего угла

$$\angle BEF = \angle ECD + \angle EDC = \angle BAD + \angle CDE = 80^\circ + 35^\circ = 115^\circ.$$

Также

$$\angle BFE = \angle FTB = \angle EDC = 35^\circ.$$

Значит,

$$\angle FBE = 180^\circ - \angle BEF - \angle BFE = 180^\circ - 115^\circ - 35^\circ = 30^\circ.$$

□

Задача 9.2. В параллелограмме $ABCD$ точка E является серединой стороны BC. Точка F на отрезке DE выбрана таким образом, что отрезки AF и DE перпендикулярны. Найдите угол $\angle FBE$, если $\angle DAB = 70^\circ$, а $\angle EDC = 45^\circ$.

Ответ: 20°

Задача 9.3. В параллелограмме $ABCD$ точка E является серединой стороны BC. Точка F на отрезке DE выбрана таким образом, что отрезки AF и DE перпендикулярны. Найдите угол $\angle FBE$, если $\angle DAB = 100^\circ$, а $\angle EDC = 20^\circ$.

Ответ: 40°

Задача 9.4. В параллелограмме $ABCD$ точка E является серединой стороны BC. Точка F на отрезке DE выбрана таким образом, что отрезки AF и DE перпендикулярны. Найдите угол $\angle FBE$, если $\angle DAB = 85^\circ$, а $\angle EDC = 25^\circ$.

Ответ: 45°

Задача 10.1. Найдите количество перестановок $(x_1, x_2, \ldots, x_{201})$ чисел

$$-99, -98, -97, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 101,$$

для которых выполнены неравенства

$$x_1x_2 \leqslant x_2x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_ix_{i+1} \leqslant x_{i+1}x_{i+2} \leqslant \ldots \leqslant x_{200}x_{201}.$$

Ответ: $3C_{101}^{98} + 4C_{101}^{99} + C_{101}^{100} = 520251$

Решение. Выпишем в ряд подходящую перестановку чисел $x_1, \dots, x_{201}$ слева направо. Пусть число 0 стоит на k-м месте. Тогда $x_n x_{n-1} \geqslant \dots \geqslant x_{k+2}x_{k+1} > 0$, откуда следует, что все числа $x_{k+1}, \dots, x_n$ — одного знака. Также $x_1 x_2 \leqslant \dots \leqslant x_{k-2}x_{k-1} < 0$, поэтому среди чисел $x_1, \dots, x_{k-1}$ положительные и отрицательные чередуются. Предположим, что после 0 все числа — отрицательные. Тогда слева от 0 отрицательных чисел должно быть не меньше 100, так как слева от 0 стоят все положительные числа. Поскольку отрицательных чисел среди $x_1, \dots, x_{201}$ всего 99, получаем противоречие. Значит, все числа, стоящие правее нуля — положительные. Заметим, что из неравенства $x_{i-1}x_i \leqslant x_i x_{i+1}$ следует, что $x_{i-1} < x_{i+1}$ при $x_i > 0$ и $x_{i-1} > x_{i+1}$ при $x_i < 0$. Поскольку слева от 0 положительные и отрицательные числа чередуются, получаем, что отрицательные числа слева от нуля строго возрастают, а положительные числа слева от нуля наоборот строго убывают. Так как слева от нуля стоят все 99 отрицательных чисел, и они чередуются с положительными, то слева от нуля могут стоять 98, 99 или 100 положительных чисел (назовём эти ситуации первым, вторым и третьим вариантом соответственно). Заметим, что в первом и третьем вариантах выбор положительных чисел, стоящих слева от 0 однозначно определяет расстановку всех чисел слева от нуля. Причём способов такого выбора есть в точности C_{101}^{98} и C_{101}^{100} в первом и третьем вариантах соответственно. Во втором же варианте для фиксированного выбора 99 положительных чисел, стоящих слева от 0, возможны два расположения чисел слева от нуля, которые отличаются знаком x_1. То есть во втором случае способов расставить числа слева от нуля есть ровно $2C_{101}^{99}$. Заметим, что справа от нуля в указанных вариантах стоит соответственно 3, 2 и 1 не выбранное положительное число. Поэтому найденные выше количества способов расстановки чисел слева от нуля нужно домножить соответственно на 3, 2 и 1 вариант расстановки оставшихся положительных чисел справа от нуля в соответствии с неравенствами из условия. Значит, всего перестановок, удовлетворяющих условиям задачи, ровно $3C_{101}^{98} + 4C_{101}^{99} + C_{101}^{100} = 520251$. □

Задача 10.2. Найдите количество перестановок $(x_1, x_2, \dots, x_{197})$ чисел

$$-97, -96, -95, \dots, -1, 0, 1, \dots, 99,$$

для которых выполнены неравенства

$$x_1x_2 \leqslant x_2x_3 \leqslant \dots \leqslant x_ix_{i+1} \leqslant x_{i+1}x_{i+2} \leqslant \dots \leqslant x_{196}x_{197}.$$

Ответ: $3C_{99}^{96} + 4C_{99}^{97} + C_{99}^{98} = 490050$

Задача 10.3. Найдите количество перестановок $(x_1, x_2, \dots, x_{193})$ чисел

$$-95, -94, -93, \dots, -1, 0, 1, \dots, 97,$$

для которых выполнены неравенства

$$x_1x_2 \leqslant x_2x_3 \leqslant \dots \leqslant x_ix_{i+1} \leqslant x_{i+1}x_{i+2} \leqslant \dots \leqslant x_{192}x_{193}.$$

Ответ: $3C_{97}^{94} + 4C_{97}^{95} + C_{97}^{96} = 461041$

Задача 10.4. Найдите количество перестановок $(x_1, x_2, \ldots, x_{189})$ чисел

$$-93, -92, -91, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 95,$$

для которых выполнены неравенства

$$x_1x_2 \leqslant x_2x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_ix_{i+1} \leqslant x_{i+1}x_{i+2} \leqslant \ldots \leqslant x_{188}x_{189}.$$

Ответ: $3C_{95}^{92} + 4C_{95}^{93} + C_{95}^{94} = 433200$

Задача 11.1. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполнено $\angle A = 2\angle B$. На стороне AB нашлась такая точка E, что $\angle BCE = \angle DCE = \angle AED$. Найдите длину отрезка AE, если $AD = 9$, $BE = 17$.

Ответ: 8

Решение. Отложим на продолжении луча BA за точку A отрезок $AF = AD$. Пусть также $\angle ABC = \varphi$, $\angle BCE = \psi$. По свойству внешнего угла $\angle CEA = \angle EBC + \angle BCE = \varphi + \psi$. Находим $\angle CED = \angle CEA - \angle AED = \varphi + \psi - \psi = \varphi$. Из треугольников CDE и AED находим $\angle CDE = 180° - \angle CED - \angle ECD = 180° - \varphi - \psi$ и $\angle ADE = 180° - \angle DAE - \angle DEA = 180° - 2\varphi - \psi$. Наконец, поскольку треугольник ADF — равнобедренный, а $\angle DAE = 2\varphi$, то $\angle ADF = \angle AFD = \varphi$. Таким образом, $\angle FDE = \angle FDA + \angle ADC = \varphi + 180° - 2\varphi - \psi = 180° - \varphi - \psi = \angle CDE$, то есть DE — биссектриса угла $\angle CDF$. Заметим, что поскольку $\angle AFD = \varphi = \angle ABC$ — угол при основании равнобедренного треугольника AFD, то $\varphi < 90°$. Значит, $\angle BFD + \angle FBC = 2\varphi < 180°$ и лучи FD и BC пересекаются в некоторой точке X. Заметим, что поскольку DE и CE — биссектрисы углов $\angle CDF$ и $\angle DCB$ соответственно, то точка E — это центр вневписанной окружности треугольника DXC, касающейся стороны DC. Значит, XE — биссектриса угла $\angle BXF$. По свойству равнобедренного треугольника, XE также является медианой треугольника BFX. То есть

$$BE = EF = AE + AF = AE + AD.$$

Значит, $AE = BE - AD = 17 - 9 = 8$. □

Задача 11.2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполнено $\angle A = 2\angle B$. На стороне AB нашлась такая точка E, что $\angle BCE = \angle DCE = \angle AED$. Найдите длину отрезка AE, если $AD = 6$, $BE = 13$.

Ответ: 7

Задача 11.3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполнено $\angle A = 2\angle B$. На стороне AB нашлась такая точка E, что $\angle BCE = \angle DCE = \angle AED$. Найдите длину отрезка AE, если $AD = 13$, $BE = 29$.

Ответ: 16

Задача 11.4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполнено $\angle A = 2\angle B$. На стороне AB нашлась такая точка E, что $\angle BCE = \angle DCE = \angle AED$. Найдите длину отрезка AE, если $AD = 7$, $BE = 18$.

Ответ: 11

Задача 12.1. Ненулевые вещественные числа a, b, c, x, y, z таковы, что

$$a = \frac{b+c}{x-2}, \quad b = \frac{a+c}{y-2}, \quad c = \frac{a+b}{z-2}.$$

Оказалось, что $xy + yz + zx = 100$, $x + y + z = 2024$. Найдите, чему равно xyz.

Ответ: -5868

Решение. Равенство $a = \frac{b+c}{x-2}$ равносильно равенству $x-2 = \frac{b+c}{a}$. Прибавив к обеим частям 1, получаем равенство

$$x - 1 = \frac{a+b+c}{a}.$$

Аналогично

$$z - 1 = \frac{a+b+c}{b} \qquad \text{и} \qquad c - 1 = \frac{a+b+c}{c}.$$

Если $a + b + c = 0$, то $x = y = z = 1$, что противоречит условию $x + y + z = 2024$. Значит, $a + b + c \neq 0$, и тогда

$$\frac{1}{x-1} = \frac{a}{a+b+c}, \quad \frac{1}{y-1} = \frac{b}{a+b+c}, \quad \frac{1}{z-1} = \frac{c}{a+b+c}.$$

Отсюда видно, что

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{z-1} = 1.$$

Приведя к общему знаменателю, получаем

$$(x-1)(y-1)(z-1) = (x-1)(y-1) + (y-1)(x-1) + (z-1)(x-1).$$

После раскрытия скобок и переноса налево всех слагаемых, кроме xyz, получаем равенство $xyz = 2(xy + yz + zx) - 3(x + y + z) + 4 = 2 \cdot 100 - 3 \cdot 2024 + 4 = -5868$. □

Задача 12.2. Ненулевые вещественные числа a, b, c, x, y, z таковы, что

$$a = \frac{b+c}{x-2}, \quad b = \frac{a+c}{y-2}, \quad c = \frac{a+b}{z-2}.$$

Оказалось, что $xy + yz + zx = 90$, $x + y + z = 2023$. Найдите, чему равно xyz.

Ответ: -5885

Задача 12.3. Ненулевые вещественные числа a, b, c, x, y, z таковы, что

$$a = \frac{b+c}{x-2}, \quad b = \frac{a+c}{y-2}, \quad c = \frac{a+b}{z-2}.$$

Оказалось, что $xy + yz + zx = 110$, $x + y + z = 2025$. Найдите, чему равно xyz.

Ответ: -5851

Задача 12.4. Ненулевые вещественные числа a, b, c, x, y, z таковы, что

$$a = \frac{b+c}{x-2}, \quad b = \frac{a+c}{y-2}, \quad c = \frac{a+b}{z-2}.$$

Оказалось, что $xy + yz + zx = 120$, $x + y + z = 2026$. Найдите, чему равно xyz.

Ответ: -5834