Осенний отбор на кружок. Очный этап

Задача 1. Вика поставила несколько фишек в некоторые клетки доски 10×19. В каждую клетку она ставила не более одной фишки. Затем она посчитала количество фишек на каждой вертикали и на каждой горизонтали (всего 29 чисел). Какое наибольшее количество попарно различных чисел могла получить Вика?

Ответ: 19

Решение. Будем считать, что доска состоит из 10 строк и 19 столбцов. Заметим, что количество фишек на любой вертикали или горизонтали находится в пределах от 0 до 19 включительно, поэтому Вика могла получить не более двадцати различных чисел. Покажем, что Вика не могла получить ровно двадцать. Предположим противное: пусть ей это удалось. Тогда в некоторой строке ровно 19 фишек. Также должен найтись ряд, в котором нет фишек. Этот ряд — строка, так как во всех столбцах уже стоит хотя бы одна фишка. Тогда во всех столбцах число фишек находится в пределах от 1 до 9 включительно, поэтому ряды, содержащие ровно $10, 11, 12, \ldots, 18$ фишек — строки. В совокупности со строками, в которых 0 и 19 фишек, получаем, что доска состоит хотя бы из 11 строк, что противоречит условию. Значит, Вика могла получить не более девятнадцати различных чисел.

Приведем пример, когда она получила ровно 19. Присвоим строкам номера от 1 до 10, а столбцам — от 1 до 19. Поставим фишки во всех клетки, у которых сумма номеров столбца и строки хотя бы 12. Тогда в первом столбце фишек не будет, во втором будет одна, в третьем — 2, $\ldots$, в десятом — 9, в одиннадцатом и далее — по 10. В первой строке будет 9 фишек, во второй — 10, в третьей — 11, $\ldots$, в десятой — 18. Таким образом, для всех k от 0 до 18 найдется ряд, в котором ровно k фишек.

$\square$

Задача 2. Найдите все вещественные решения уравнения

$$2^x + 3^x - 4^x + 6^x - 9^x = 1.$$

Ответ: $x = 0$

Решение. Сделаем замену $a = 2^x, b = 3^x$ и запишем цепочку равенств, эквивалентных исходному:

$$a + b - a^2 + ab - b^2 = 1 \iff ab + a + b - 1 = a^2 + b^2 \iff$$

$$\iff ab - a - b + 1 = a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 \iff$$

$$\iff (a-1)(b-1) = (a-1)^2 + (b-1)^2.$$

При $x > 0$ выполняется $a-1 > 0, b-1 > 0$. При $x < 0$ выполняется $a-1 < 0, b-1 < 0$. Итого, при $x \neq 0$ верно $(a-1)(b-1) > 0$. Тогда

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 \geqslant 2(a-1)(b-1) > (a-1)(b-1),$$

и уравнение не имеет решений.

Единственный оставшийся вариант $x = 0$ является решением исходного уравнения, что можно проверить непосредственно.

$\square$

Задача 3. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ образуют перестановку чисел $1, 2, \ldots, 100$. Обозначим за s_i следующие суммы:

$$s_1 = a_1; \quad s_2 = a_1 + a_2; \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3; \quad \ldots; \quad s_{100} = a_1 + \ldots + a_{100}.$$

Найдите количество таких перестановок (a_i), для которых ни одно из чисел $s_1, s_2, \ldots, s_{100}$ не делится на 3.

Ответ: $34! \cdot (33!)^2 \cdot C_{99}^{33}$

Решение. Каждой перестановке (a_i) сопоставим последовательность (b_i), в которой для всех i от 1 до 100 число b_i равняется остатку от деления a_i на 3. Также определим для всех i от 1 до 100 величину r_i — остаток от деления $b_1 + \ldots + b_i$ на 3. Так как (a_i) — перестановка чисел от 1 до 100, (b_i) состоит ровно из 34 единиц, 33 двоек и 33 нулей. Заметим, что каждая последовательность (b_i) соответствует ровно $34! \cdot 33! \cdot 33!$ последовательностям (a_i). Также заметим, что среди $s_1, s_2, \ldots, s_{100}$ нет чисел, делящихся на 3, тогда и только тогда, когда среди $r_1, \ldots, r_{100}$ нет нулей.

Зафиксируем произвольную подходящую под условие последовательность (a_i) и соответствующую ей (b_i). Заметим, что $b_1 \neq 0$. Рассмотрим b_m — второй ненулевой член последовательности. Верны утверждения ниже:

$$b_1 = r_1 = \ldots = r_{m-1}; \qquad r_m \equiv b_1 + b_m \mod 3.$$

Так как $r_1 \neq 0, r_m \neq 0$, выполняется $b_1 = b_m$.

Теперь рассмотрим произвольные соседние ненулевые члены b_i и b_j, $1 < i < j$. Выполняются следующие условия:

$$r_{i-1} \neq 0; \qquad r_{i-1} + b_i \equiv r_i \equiv \ldots \equiv r_{j-1} \not\equiv 0 \mod 3;$$
$$r_j \equiv r_i + b_j \equiv r_{i-1} + b_i + b_j \not\equiv 0 \mod 3.$$

Если $b_i = b_j$, то среди r_{i-1}, r_i, r_{i+1} нашлось бы число, делящееся на 3. Такого быть не может, поэтому $b_i \neq b_j$.

Итак, первые два ненулевые члена (b_i) равны, а дальше ненулевые члены, равные 1 и 2, чередуются (между соседним ненулевыми членам могут быть нули). Так как среди (b_i) больше единиц, чем двоек, то первые два ненулевые члена обязательно должны быть единицами.

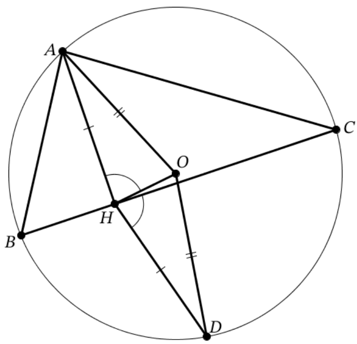
Назовём последовательность (b_i) *хорошей*, если она состоит из 34 единиц, 33 двоек и 33 нулей, причём первые два ее ненулевых члена — единицы, а дальше любые два соседних ненулевых члена различны. Мы уже доказали, что если для некоторой (b_i) среди (r_i) нет нулей, то она хорошая. Легко убедиться, что это верно и в обратную сторону.

Хороших последовательностей C_{99}^{33} — необходимо выбрать 33 позиции среди позиций от 2 до 100, на которых будут нули, остальные позиции будут заполнены однозначно. Значит, число последовательностей (a_i), подходящих под условие, равно $34! \cdot (33!)^2 \cdot C_{99}^{33}$. □

Задача 4. Дан треугольник ABC, в котором $AB < AC$. Точка O — центр описанной окружности, а отрезок AH — высота этого треугольника. Точка D лежит на описанной окружности треугольника ABC так, что A и D лежат по разные стороны от BC и $AH = DH$. Оказалось, что $\angle AHO = \angle CHD$. Найдите угол A данного треугольника.

Ответ: $\angle A = 90^\circ$

Решение.



Рассмотрим треугольники AHO и DHO. Их сторона OH — общая, $AH = DH$ по условию, $AO = DO$ как радиусы описанной окружности. Таким образом, эти треугольники равны, и $\angle DHO = \angle AHO = \angle CHD$ (последнее равенство выполнено по условию). Точки O и C лежат по одну сторону от прямой DH, значит, точки H, C, O лежат на одной прямой. То есть, центр описанной окружности треугольника ABC лежит на прямой, содержащей сторону BC, что может быть только при $\angle A = 90^\circ$. $\square$

Задача 5. На Марсе живут марсиане. Оказалось, что для некоторого натурального $n > 2$ у любого набора из n марсиан есть единственный общий знакомый марсианин. Какое наибольшее количество знакомых может быть у марсианина? Дайте ответ в зависимости от n.

(Если марсианин A знаком с марсианином B, то и B знаком с A; никто из марсиан не считается знакомым с самим собой.)

Ответ: n

Решение. Если марсиан всего $n + 1$ и любые два знакомы, то условие выполняется, а максимальное число знакомых у одного марсианина — n. Докажем индукцией по n, что для любого $n > 2$ если у любого набора из n марсиан есть единственный общий знакомый марсианин, то или марсиан меньше n, или их ровно $n + 1$, причем любые два знакомы. Отсюда будет следовать, в частности, ответ на вопрос задачи.

База: $n = 3$. Пусть марсиан хотя бы 3. Рассмотрим произвольную тройку марсиан и m — их единственного общего знакомого. Положим N — множество марсиан, знакомых с m. Оно состоит хотя бы из трех марсиан. У каждого марсианина m_1 из N не больше двух знакомых из N, иначе нашлась бы тройка марсиан, у которых есть два общих знакомых — m и m_1. При этом у любых двух марсиан из N есть единственный общий знакомый из N, так как у тройки, состоящей из них двоих и m был единственный общий знакомый.

Рассмотрим граф, вершины которого — марсиане из N, а ребрами соединены пары вершин, соответствующие парам знакомых марсиан. Он связен, так как для любых двух вершин найдется смежная им обеим. При этом степень каждой вершины в этом графе не больше 2, а значит, он является путем или циклом. В этом графе хотя бы три вершины и между любыми двумя есть путь длины два, значит, это цикл длины 3.

Итак, мы доказали, что если у марсианина хотя бы три знакомых, то их ровно три и они попарно знакомы между собой. Других знакомых у этих трех марсиан нет, так как для них тоже можно было бы применить рассуждение выше. Если бы существовал марсианин, отличный от описанных четырех, то у тройки, состоящей из него и каких-то двух марсиан из описанных четырех не было бы общих знакомых, что противоречит условию. Значит, марсиан всего 4 и они попарно знакомы.

Переход: Пусть наше утверждение уже доказано для $n = 3, \ldots, k - 1$, докажем для $n = k$. Допустим, марсиан хотя бы k. Аналогично базе, рассмотрим произвольных k марсиан и m — их единственного общего знакомого. Положим N — множество марсиан, знакомых с m. У любых $k - 1$ марсианина из N есть ровно один общий знакомый из N, так как у набора из k марсиан, полученного добавлением m к этому набору из $k-1$ марсианина, был единственный общий знакомый. Так как $|N| \geqslant k$, по предположению индукции N состоит из k попарно знакомых марсиан. Таким образом, если у марсианина хотя бы k знакомых, то их ровно k, причем все они знакомы между собой, а других знакомых у них нет. Теми же рассуждениями, что и раньше, получим, что никаких других марсиан нет. То есть, всего марсиан $k+1$ и они попарно знакомы, что и требовалось. $\square$

Задача 6. Для действительных чисел a, b, c выполнены условия

- $\min\{a, b, c\} > 1$;
- $ab + bc + ca = 18$.

Докажите, что

$$\frac{1}{(a-1)^3} + \frac{1}{(b-1)^3} + \frac{1}{(c-1)^3} > \frac{1}{a+b+c-3}.$$

Решение. Заметим, что числа $a-1, b-1, c-1$ положительны. Воспользуемся неравенством Коши—Буняковского—Шварца для дробей и получим, что

$$\frac{\frac{1}{(a-1)^2}}{a-1} + \frac{\frac{1}{(b-1)^2}}{b-1} + \frac{\frac{1}{(c-1)^2}}{c-1} \geqslant \frac{\left(\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1}\right)^2}{a+b+c-3}.$$

Докажем, что

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} > 1, \tag{1}$$

откуда будет следовать заявленное неравенство.

Без ограничения общности будем считать, что $a \geqslant b \geqslant c$. Если $c < 2$, то неравенство (1) выполнено. Иначе, $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 2$. При этом $c < 3$, так как иначе $ab + bc + ac \geqslant 27$. Если $c < 3$ и $b \leqslant 3$, неравеснтво (1) тоже выполнено. Осталось рассмотреть случай $a \geqslant b > 3 > c \geqslant 2$. Тогда

$$ab + bc + ac > 3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 21 > 18,$$

чего не может быть. Таким образом, (1) всегда выполнено, а значит, выполнено и исходное неравенство. $\square$