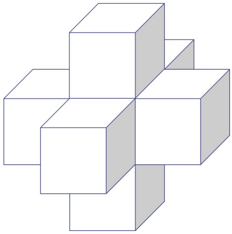
Осенний отбор на кружок. Дистанционный этап

1.1. Из семи равных кубиков склеили один многогранник так, что к каждой грани одного из них прилегает грань одного из оставшихся (полученный многогранник изображён на рисунке).



Оказалось, что существует сфера, проходящая через все вершины этого многогранника, не являющиеся вершинами центрального кубика. Найдите объём полученного многогранника, если радиус сферы равен $\sqrt{44}$.

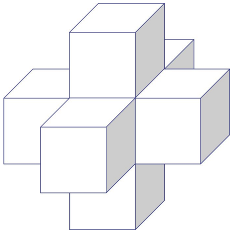
Ответ: 448.

Решение. Пусть сторона одного кубика равна a. Тогда в данную сферу вписан прямоугольный параллелепипед $a \times a \times 3a$. Диагонали этого параллелепипеда являются диаметрами сферы и равны $2\sqrt{44}$. Из теоремы Пифагора легко следует, что

$$a^2 + a^2 + (3a)^2 = \left(2\sqrt{44}\right)^2,$$

откуда получаем $a = 4$. Остаётся вычислить объём по формуле $V = 7a^3$.

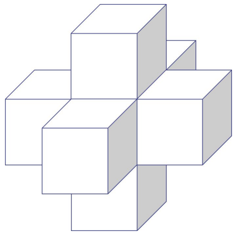
1.2. Из семи равных кубиков склеили один многогранник так, что к каждой грани одного из них прилегает грань одного из оставшихся (полученный многогранник изображён на рисунке).



Оказалось, что существует сфера, проходящая через все вершины этого многогранника, не являющиеся вершинами центрального кубика. Найдите объём полученного многогранника, если радиус сферы равен $\sqrt{99}$.

Ответ: 1512.

1.3. Из семи равных кубиков склеили один многогранник так, что к каждой грани одного из них прилегает грань одного из оставшихся (полученный многогранник изображён на рисунке).



Оказалось, что существует сфера, проходящая через все вершины этого многогранника, не являющиеся вершинами центрального кубика. Найдите объём полученного многогранника, если радиус сферы равен $\sqrt{275}$.

Ответ: 7000.

2. Андрей сказал Юре: «Я задумал два различных простых числа, больших 10, возвёл каждое из них в четвёртую степень и вычислил разность полученных чисел». На что Юра ответил: «Хоть я и не знаю, чему равна получившаяся разность, но уверен, что она делится на k.» Какое наибольшее k мог назвать Юра, чтобы его утверждение было верным?

Ответ: 240.

Решение. Пусть Андрей задумал числа p и q. Тогда

$$p^4 - q^4 = (p-q)(p+q)(p^2+q^2).$$

Заметим, что так как числа p и q нечётные, то каждый из трёх множителей в правой части чётный. Кроме того, $(p+q)-(p-q) = 2q$ делится на 2 и не делится на 4. Из последнего замечания следует, что один из множителей $(p+q)$ и $(p-q)$ делится на 4. Поэтому

$$p^4 - q^4 \ \vdots\ 16.$$

Заметим, что $p^4 - q^4 \ \vdots\ p^2 - q^2$. Из малой теоремы Ферма следует, что

$$p^2 - q^2 \ \vdots\ 3 \quad \text{и} \quad p^4 - q^4 \ \vdots\ 5.$$

Поэтому всегда выполнено

$$p^4 - q^4 \ \vdots\ 16 \cdot 3 \cdot 5.$$

Таким образом, $p^4 - q^4$ гарантированно делится на $16 \cdot 3 \cdot 5 = 240$. Теперь объясним, почему Юра не мог назвать большее число. Действительно:

$$17^4 - 13^4 = (17-13)(17+13)(17^2+13^2) = 4 \cdot 30 \cdot (17^2+13^2).$$

Запишем несколько сравнений:

$$\begin{array}{rclcll}
17^2+13^2 & \equiv & 1^2+1^2 & \not\equiv & 0 & \pmod 4; \\
17^2+13^2 & \equiv & 2^2+1^2 & \not\equiv & 0 & \pmod 3; \\
17^2+13^2 & \equiv & 2^2+3^2 & \not\equiv & 0 & \pmod 5; \\
17^2+13^2 & \equiv & 3^2+(-1)^2 & \not\equiv & 0 & \pmod 7.
\end{array}$$

Из этих сравнений следует, что степени вхождения 2, 3, 5 и 7 в число k не могут быть выше чем 4, 1, 1 и 0 соответственно. Также число k не может делиться ни на какое простое r, большее 10, так как Андрей мог задумать r в качестве одного из чисел.

3.1. 13 прямых разбивают квадрат на несколько многоугольников. Найдите максимально возможную сумму углов этих многоугольников. Ответ выразите в градусах.

Ответ: 33120.

Решение. Пусть a — количество различных точек, в которых прямые пересекают границу квадрата (кроме вершин квадрата), а b — количество различных точек строго внутри квадрата, в которых прямые пересекаются между собой. Тогда углы многоугольников из условия разбиваются на три группы:

- углы, вершины которых совпадают с одной из вершин квадрата, сумма всех таких углов равна 360°;
- углы, вершины которых лежат на сторонах квадрата (но не в вершинах), сумма всех таких углов равна $a \cdot 180^\circ$;
- углы, вершины которых вершины которых лежат строго внутри квадрата, сумма всех таких углов равна $b \cdot 360^\circ$.

Заметим, что $a \leqslant 13 \cdot 2$ и $b \leqslant C_{13}^2$. Покажем, что эти два неравенства могут одновременно обратиться в равенства. Для этого выберем произвольный набор из 13 попарно непараллельных прямых, никакие три из которых не проходят через одну точку. Очевидно, что существует такой квадрат, что его центр не лежит ни на какой из выбранных прямых, а все C_{13}^2 точек пересечения выбранных прямых содержатся внутри этого квадрата. Если какие-то вершины квадрата попали на выбранные прямые, то сделаем гомотетию с центром в центре нашего квадрата и коэффициентом больше 1. Очевидно, что можно так подобрать коэффициент, что ни одна вершина образа нашего квадрата уже не будет попадать на выбранные прямые. Остаётся только применить преобразование подобия, переводящее полученный квадрат в тот, что дан по условию.

Итак, мы доказали, что сумма углов многоугольников не превосходит $360^\circ + 2 \cdot 13 \cdot 180^\circ + C_{13}^2 \cdot 360^\circ = 33120^\circ$, причём равенство достижимо.

3.2. 15 прямых разбивают квадрат на несколько многоугольников. Найдите максимально возможную сумму углов этих многоугольников. Ответ выразите в градусах.

Ответ: 43560.

3.3. 17 прямых разбивают квадрат на несколько многоугольников. Найдите максимально возможную сумму углов этих многоугольников. Ответ выразите в градусах.

Ответ: 55440.

3.4. 19 прямых разбивают квадрат на несколько многоугольников. Найдите максимально возможную сумму углов этих многоугольников. Ответ выразите в градусах.

Ответ: 68760.

4.1. Полином $1-x+x^2-x^3+\ldots+x^{12}-x^{13}$ переписали в виде $a_0+a_1y+a_2y^2+\ldots+a_{13}y^{13}$, где $y=x+1$, а $a_0,a_1,\ldots,a_{13}$ — числа. Найдите a_2.

Ответ: 364.

Решение. Запишем верное равенство:

$$(1+x)(1-x+x^2-x^3+\ldots+x^{12}-x^{13})=1-x^{14}.$$

Перепишем это равенство, заменив x на y:

$$y(a_0+a_1y+a_2y^2+\ldots+a_{13}y^{13})=1-(y-1)^{14}.$$

Из выкладок следует, что число a_2 равно коэффициенту при y^3 в полиноме $1-(y-1)^{14}$. Этот коэффициент равен $-(-C_{14}^3)=364$.

4.2. Полином $1-x+x^2-x^3+\ldots+x^{14}-x^{15}$ переписали в виде $a_0+a_1y+a_2y^2+\ldots+a_{15}y^{15}$, где $y=x+1$, а $a_0,a_1,\ldots,a_{15}$ — числа. Найдите a_2.

Ответ: 560.

4.3. Полином $1-x+x^2-x^3+\ldots+x^{16}-x^{17}$ переписали в виде $a_0+a_1y+a_2y^2+\ldots+a_{17}y^{17}$, где $y=x+1$, а $a_0,a_1,\ldots,a_{17}$ — числа. Найдите a_2.

Ответ: 816.

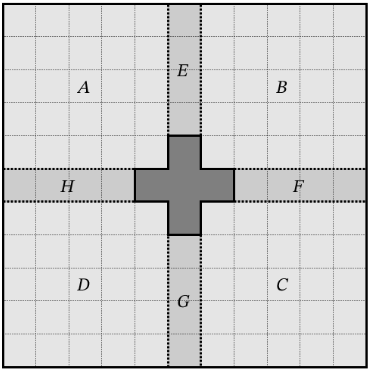
4.4. Полином $1-x+x^2-x^3+\ldots+x^{18}-x^{19}$ переписали в виде $a_0+a_1y+a_2y^2+\ldots+a_{19}y^{19}$, где $y=x+1$, а $a_0,a_1,\ldots,a_{19}$ — числа. Найдите a_2.

Ответ: 1140.

5.1. Из центра квадрата 11×11 вырезали крест из 5 клеток. Найдите число способов вырезать из оставшейся фигуры по линиям сетки клетчатый прямоугольник.

Ответ: 2340.

Решение. В этом решении под прямоугольниками понимаются только такие прямоугольники, которые содержатся внутри оставшейся фигуры и границы которых проходят по линиям сетки.



Разобьем оставшуюся фигуру на 8 областей A, B, C, D, E, F, G, H как показано на рисунке. Пусть множество M_A состоит из прямоугольников, содержащихся в квадрате M_A. Аналогично пусть множества M_B, M_C, M_D состоят из прямоугольников, содержащихся в квадратах B, C, D соответственно. Пусть множество N_E состоит из прямоугольников, пересекающихся с прямоугольником E хотя бы по одной клетке. Аналогично пусть множества N_F, N_G, N_H состоит из прямоугольников, пересекающихся соответственно с прямоугольниками F, G, H хотя бы по одной клетке.

Заметим, что множества $M_A, M_B, M_C, M_D, N_E, N_F, N_G, N_H$ попарно не пересекаются и в объединении дают множество всех интересующих нас прямоугольников. Также очевидно, что $|M_A| = |M_B| = |M_C| = |M_D|$ и $|N_E| = |N_F| = |N_G| = |N_H|$. Из сказанного следует, что искомая величина равна $4|M_A| + 4|N_E|$.

Любой прямоугольник задаётся парой вертикальных прямых и парой горизонтальных прямых, содержащих стороны этого прямоугольника. Для прямоугольников из M_A как вертикальную так и горизонтальную пару можно выбрать C_6^2 способами. Поэтому $|M_A| = (C_6^2)^2$. Для прямоугольников из N_E и левую, и правую вертикальную прямую можно выбрать 6 способами независимо друг от друга, а пару горизонтальных прямых можно выбрать C_5^2 способами. Поэтому $|N_E| = 6 \cdot 6 \cdot C_5^2$. Проведя вычисления, получаем ответ.

5.2. Из центра квадрата 13×13 вырезали крест из 5 клеток. Найдите число способов вырезать из оставшейся фигуры по линиям сетки клетчатый прямоугольник.

Ответ: 4704.

5.3. Из центра квадрата 15×15 вырезали крест из 5 клеток. Найдите число способов вырезать из оставшейся фигуры по линиям сетки клетчатый прямоугольник.

Ответ: 8512.

5.4. Из центра квадрата 17×17 вырезали крест из 5 клеток. Найдите число способов вырезать из оставшейся фигуры по линиям сетки клетчатый прямоугольник.

Ответ: 14256.

6.1. Представьте число

$$\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\ldots+\frac{50}{48!+49!+50!}$$

в виде обыкновенной несократимой дроби. В ответ запишите остаток от деления знаменателя этой дроби на 53.

Ответ: 26.

Решение. Заметим, что при натуральных $k \geqslant 1$ выполнено:

$$\frac{k}{(k-2)!+(k-1)!+k!}=\frac{1}{(k-2)!k}=\frac{k-1}{k!}=\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}.$$

Поэтому сумма из условия равна

$$\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{49!}-\frac{1}{50!}\right).$$

Сократив противоположные слагаемые, получаем

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{50!}=\frac{(50!/2)-1}{50!}.$$

Очевидно, что полученная дробь несократима. Для ответа на вопрос задачи остаётся вычислить остаток числа $50!$ по модулю 53. Для этого удобно воспользоваться теоремой Вильсона: так как $52! \equiv -1 \pmod{53}$, то

$$50! \equiv (-1)\cdot 51^{-1}\cdot 52^{-1} \equiv (-1)\cdot 26\cdot(-1) \pmod{53}.$$

Здесь записи 51^{-1} и 52^{-1} означают остатки, обратные остаткам 51 и 52 по модулю 53.

6.2. Представьте число

$$\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\ldots+\frac{100}{98!+99!+100!}$$

в виде обыкновенной несократимой дроби. В ответ запишите остаток от деления знаменателя этой дроби на 103.

Ответ: 51.

6.3. Представьте число

$$\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\ldots+\frac{80}{78!+79!+80!}$$

в виде обыкновенной несократимой дроби. В ответ запишите остаток от деления знаменателя этой дроби на 83.

Ответ: 41.

6.4. Представьте число

$$\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\ldots+\frac{110}{108!+109!+110!}$$

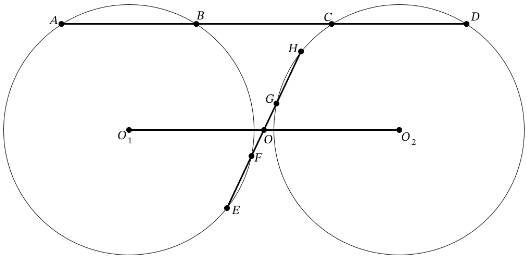
в виде обыкновенной несократимой дроби. В ответ запишите остаток от деления знаменателя этой дроби на 113.

Ответ: 56.

7.1. Даны две непересекающиеся окружности ω_1 и ω_2 равного радиуса. Точка O — середина отрезка с концами в центрах этих окружностей. Прямая l, параллельная линии центров, пересекает окружность ω_1 в точках A и B, а окружность ω_2 — в точках C и D. Прямая m, проходящая через O, пересекает окружность ω_1 в точках E и F, а окружность ω_2 — в точках G и H. Найдите радиус этих окружностей, если известно, что $AB = BC = CD = 14$ и $EF = FG = GH = 6$.

Ответ: 13.

Решение.



Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей ω_1 и ω_2, а r — искомый радиус.

Заметим, что $BO = CO$ из симметрии. Теперь рассмотрим $\triangle ABO_1$ и $\triangle BCO$. Это два равнобедренных треугольника, у которых равны основания ($AB = BC$ по условию) и высоты, проведённые к этим основаниям (так как $AB \parallel OO_1$). Из этого следует, что $\triangle ABO_1 = \triangle BCO$.

Из доказанного равенства треугольников следует $AO_1 = O_1B = BO = OC$. Теперь рассмотрим $\triangle ABO_1$ и $\triangle BOO_1$. Это два равнобедренных треугольника, у которых равны боковые стороны и высоты, проведённые к основаниям. Из этого следует, что $\triangle ABO_1 = \triangle BOO_1$, а значит $OO_1 = AB = 14$.

Теперь двумя способами посчитаем степень точки O относительно окружности ω_1:

$$\operatorname{Pow}(O, \omega_1) = OF \cdot OE = 3 \cdot 9 = 27;$$

$$\operatorname{Pow}(O, \omega_1) = OO_1^2 - r^2.$$

Получаем, что $r^2 = 14^2 - 27$, то есть $r = 13$.

7.2. Даны две непересекающиеся окружности ω_1 и ω_2 равного радиуса. Точка O — середина отрезка с концами в центрах этих окружностей. Прямая l, параллельная линии центров, пересекает окружность ω_1 в точках A и B, а окружность ω_2 — в точках C и D. Прямая m, проходящая через O, пересекает окружность ω_1 в точках E и F, а окружность ω_2 — в точках G и H. Найдите радиус этих окружностей, если известно, что $AB = BC = CD = 19$ и $EF = FG = GH = 16$.

Ответ: 13.

7.3. Даны две непересекающиеся окружности ω_1 и ω_2 равного радиуса. Точка O — середина отрезка с концами в центрах этих окружностей. Прямая l, параллельная линии центров, пересекает окружность ω_1 в точках A и B, а окружность ω_2 — в точках C и D. Прямая m, проходящая через O, пересекает окружность ω_1 в точках E и F, а окружность ω_2 — в точках G и H. Найдите радиус этих окружностей, если известно, что $AB = BC = CD = 14$ и $EF = FG = GH = 10$.

Ответ: 11.

7.4. Даны две непересекающиеся окружности ω_1 и ω_2 равного радиуса. Точка O — середина отрезка с концами в центрах этих окружностей. Прямая l, параллельная линии центров, пересекает окружность ω_1 в точках A и B, а окружность ω_2 — в точках C и D. Прямая m, проходящая через O, пересекает окружность ω_1 в точках E и F, а окружность ω_2 — в точках G и H. Найдите радиус этих окружностей, если известно, что $AB = BC = CD = 13$ и $EF = FG = GH = 8$.

Ответ: 11.

8.1. В графе G 2025 вершин и 3025 рёбер. Какое наименьшее количество простых циклов может быть в этом графе?

(Напомним, что простой цикл — цикл, в котором все вершины различны. Циклы, отличающиеся отражением или сдвигом, считаются одинаковыми: например, цикл A, B, C — то же самое, что A, C, B или B, C, A.)

Ответ: 1001.
Решение.

Оценка. Пусть в графе G n простых циклов. Докажем, что $n \geqslant 1001$. Назовем операцией удаление произвольного ребра из произвольного простого цикла в графе. Легко видеть, что при проведении операции в графе уменьшается количество простых циклов (новых не добавляется, как минимум один старый простой цикл пропадает). Применим операцию к графу G, и получим граф G_1. Если возможно, применим операцию к графу G_1, и получим граф G_2. Будем продолжать применять операции пока это возможно. В итоге получим граф G_k без циклов, где k — суммарное количество удалённых ребер. Так как в графе G_k 2025 вершин и нет циклов, то ребер в нем не больше чем 2024. Значит, было удалено хотя бы $3025 - 2024 = 1001$ рёбер, то есть $k \geqslant 1001$. С другой стороны, $n \geqslant k$, так как после каждой операции число циклов уменьшалось хотя бы на 1. Таким образом, $n \geqslant k \geqslant 1001$, и оценка доказана.

Пример. Приведём пример графа G, котором $n = 1001$. Рассмотрим граф, вершины которого названы $A, B_1, B_2, \ldots, B_{2024}$. Пусть в этом графе проведены рёбра $AB_1, AB_2, \ldots, AB_{2024}$, а также рёбра $B_1B_2, B_3B_4, \ldots, B_{2001}B_{2002}$, и других рёбер нет. Заметим, что этот граф удовлетворяет условиям задачи, и в нём ровно 1001 простой цикл (все циклы треугольные). Пример построен.

8.2. В графе G 3003 вершин и 4203 рёбер. Какое наименьшее количество простых циклов может быть в этом графе?

(Напомним, что простой цикл — цикл, в котором все вершины различны. Циклы, отличающиеся отражением или сдвигом, считаются одинаковыми: например, цикл A, B, C — то же самое, что A, C, B или B, C, A.)

Ответ: 1201.

8.3. В графе G 1515 вершин и 2025 рёбер. Какое наименьшее количество простых циклов может быть в этом графе?

(Напомним, что простой цикл — цикл, в котором все вершины различны. Циклы, отличающиеся отражением или сдвигом, считаются одинаковыми: например, цикл A, B, C — то же самое, что A, C, B или B, C, A.)

Ответ: 511.

8.4. В графе G 3333 вершин и 4444 рёбер. Какое наименьшее количество простых циклов может быть в этом графе?

(Напомним, что простой цикл — цикл, в котором все вершины различны. Циклы, отличающиеся отражением или сдвигом, считаются одинаковыми: например, цикл A, B, C — то же самое, что A, C, B или B, C, A.)

Ответ: 1112.

9.1. Функция $f(x)$ задана равенством

$$f(x) = \frac{2}{4^x + 2}.$$

Найдите значение суммы

$$f\left(\frac{1}{2025}\right) + f\left(\frac{2}{2025}\right) + \ldots + f\left(\frac{2024}{2025}\right).$$

Ответ: 1012

Решение. Найдём формулу для $f(1-x)$:

$$f(1-x) = \frac{2}{4^{1-x} + 2} \cdot \frac{4^x/2}{4^x/2} = \frac{4^x}{2 + 4^x}.$$

Заметим, что $f(x) + f(1-x) = 1$. Поэтому

$$f\left(\frac{1}{2025}\right) + f\left(\frac{2}{2025}\right) + \ldots + f\left(\frac{2024}{2025}\right) =$$
$$\left(f\left(\frac{1}{2025}\right) + f\left(\frac{2024}{2025}\right)\right) + \ldots + \left(f\left(\frac{1012}{2025}\right) + f\left(\frac{1013}{2025}\right)\right) = 1012.$$

9.2. Функция $f(x)$ задана равенством

$$f(x) = \frac{3}{9^x + 3}.$$

Найдите значение суммы

$$f\left(\frac{1}{2025}\right) + f\left(\frac{2}{2025}\right) + \ldots + f\left(\frac{2024}{2025}\right).$$

Ответ: 1012.

9.3. Функция $f(x)$ задана равенством

$$f(x) = \frac{4}{16^x + 4}.$$

Найдите значение суммы

$$f\left(\frac{1}{2025}\right) + f\left(\frac{2}{2025}\right) + \ldots + f\left(\frac{2024}{2025}\right).$$

Ответ: 1012.

9.4. Функция $f(x)$ задана равенством

$$f(x) = \frac{5}{25^x + 5}.$$

Найдите значение суммы

$$f\left(\frac{1}{2025}\right) + f\left(\frac{2}{2025}\right) + \ldots + f\left(\frac{2024}{2025}\right).$$

Ответ: 1012.

10.1. Про вещественные числа a, b, c, d и e известно, что

$$a + b + c + d + e = 8 \quad \text{и} \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16.$$

Найдите максимальное и минимальное возможное значение a. В ответ запишите модуль разности между этими двумя числами.

Ответ: 3.2.

Решение. Введём следующие обозначения:

$$x = \frac{8 - a}{4};$$
$$b' = b - x;$$
$$c' = c - x;$$
$$d' = d - x;$$
$$e' = e - x.$$

Так как $b+c+d+e=4x$ (из первого условия задачи), то $b'+c'+d'+e'=0$. Запишем второе условие задачи:

$$a^2+(x+b')^2+(x+c')^2+(x+d')^2+(x+e')^2=16.$$

Раскрыв скобки и воспользовавшись равенством $b'+c'+d'+e'=0$, получаем:

$$\frac{5}{4}a^2-4a+b'^2+c'^2+d'^2+e'^2=0.$$

Из последнего равенства следует, что величина $\frac{5}{4}a(a-\frac{16}{5})$ неположительная, то есть a не может принимать значения за пределами отрезка $\left[0, \frac{16}{5}\right]$. При этом значения 0 и $\frac{16}{5}$ могут достигаться только при $b'=c'=d'=e'=0$. Проверив, что наборы $(0,2,2,2,2)$ и $\left(\frac{16}{5},\frac{6}{5},\frac{6}{5},\frac{6}{5},\frac{6}{5}\right)$ удовлетворяют равенствам из условия, убеждаемся, что значения $a=0$ и $a=\frac{16}{5}$ возможны. Остаётся записать разность этих чисел в ответ.

10.2. Про вещественные числа a, b, c, d и e известно, что

$$a+b+c+d+e=12 \quad \text{и} \quad a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=36.$$

Найдите максимальное и минимальное возможное значение a. В ответ запишите модуль разности между этими двумя числами.

Ответ: 4.8.

10.3. Про вещественные числа a, b, c, d и e известно, что

$$a+b+c+d+e=2 \quad \text{и} \quad a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=1.$$

Найдите максимальное и минимальное возможное значение a. В ответ запишите модуль разности между этими двумя числами.

Ответ: 0.8.

11.1. Окружность разбита 60 точками $A_1, A_2, \ldots, A_{60}$ на 60 одинаковых дуг. В точке A_1 стоит фишка. Разрешается передвигать фишку либо в соседнюю точку, либо в диаметрально противоположную точку. Сколько способов существует обойти все точки по одному разу и вернуться в A_1?

Ответ: 62.

Решение. Будем называть способ обхода, удовлетворяющий условию, *обходом*, а передвижение фишки вдоль диаметра — *длинным ходом.* Если в обходе есть ход из A_i в A_j, то будем говорить, что в обходе есть *ребро* A_iA_j. Будем считать, что A_iA_j и A_jA_i — это одно и то же ребро. Будем говорить, что ребро A_iA_j *проходит через точки* A_i и A_j.

Посчитаем, сколько может быть длинных ходов в обходе.

Есть ровно 2 обхода, в которых 0 длинных ходов.

Предположим, что в обходе есть ровно один длинный ход — A_iA_{30+i} (здесь и далее все индексы рассматриваются по модулю 60). Тогда через точку A_{i-1} проходят ровно два ребра, и это могут быть только рёбра $A_{i-2}A_{i-1}$ и $A_{i-1}A_i$. Аналогично через точку A_{i+1} проходят рёбра A_iA_{i+1} и $A_{i+1}A_{i+2}$. Но тогда через точку A_i проходит три ребра, что невозможно. Следовательно, обходов, в которых ровно 1 длинный ход, не существует.

Предположим, что в обходе есть длинные ходы A_iA_{i+30} и A_jA_{j+30} ($1 \leqslant i < j \leqslant 30$). Предположим, что $j - i \geqslant 2$, и что в обходе нет длинных ходов, содержащих точки $i+1, i+2, \ldots, j-1$. Тогда в обходе должны быть ребра $A_iA_{i+1}, \ldots, A_{j-1}A_j$ и $A_{i+30}A_{i+31}, \ldots, A_{j+29}A_{j+30}$. Эти ребра вместе с двумя рассмотренными длинными ходами образуют цикл. Значит, либо $j - i = 1$, либо $i = 1, j = 30$ (иначе цикл проходит не через все вершины). В обоих случаях длинные ходы идут вдоль соседних диаметров.

Предположим, что в обходе ровно два длинных хода. Как мы поняли, они должны идти вдоль соседних диаметров. Пару соседних диаметров можно выбрать тридцатью способами, для каждого способа существует по два обхода. Итого 60 обходов в этом случае.

Теперь предположим, что в обходе более двух длинных ходов. Из наших рассуждений следует, что тогда в обходе есть длинные ходы вдоль всех тридцати диаметров. Точка A_1 соединена ребром с A_{31} и ещё с одной точкой — либо с A_2, либо с A_{60}. Предположим, что она соединена с A_2 (второй случай аналогичен). Тогда в обходе должно быть ребро $A_{30}A_{31}$ (иначе точка A_{31} соединена ребром с A_{32} и образуется цикл $A_1A_2A_{32}A_{31}$). Так как есть ребро A_2A_{32}, в обходе не может быть ребра A_2A_3. Значит, обязательно должно быть ребро A_3A_4. Рассуждая аналогично, получим, что в обходе будут ребра $A_5A_6, A_7A_8, \ldots, A_{29}A_{30}$. Но тогда через точку A_{30} подходит три ребра, что невозможно. Мы доказали, что в обходе не может быть более двух длинных ходов. *(Заметим, что если бы число точек на окружности имело вид $4k + 2$, то этот случай был бы возможен и дал бы ещё 4 обхода).*

Мы рассмотрели все возможные случаи. Просуммировав количество обходов для каждого из них, получаем ответ.

11.2. Окружность разбита 100 точками $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ на 100 одинаковых дуг. В точке A_1 стоит фишка. Разрешается передвигать фишку либо в соседнюю точку, либо в диаметрально противоположную точку. Сколько способов существует обойти все точки по одному разу и вернуться в A_1?

Ответ: 102.

11.3. Окружность разбита 80 точками $A_1, A_2, \ldots, A_{80}$ на 80 одинаковых дуг. В точке A_1 стоит фишка. Разрешается передвигать фишку либо в соседнюю точку, либо в диаметрально противоположную точку. Сколько способов существует обойти все точки по одному разу и вернуться в A_1?

Ответ: 82.

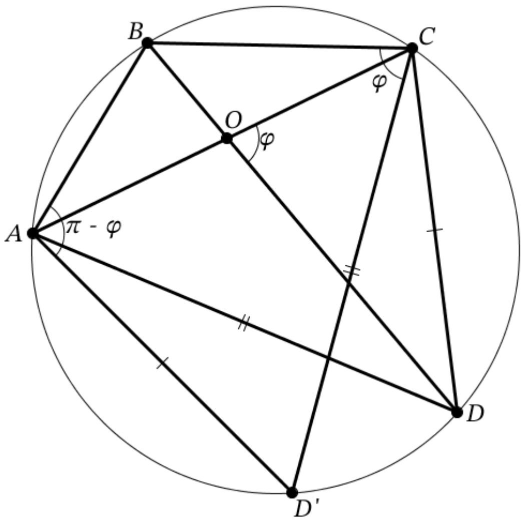
11.4. Окружность разбита 120 точками $A_1, A_2, \ldots, A_{120}$ на 120 одинаковых дуг. В точке A_1 стоит фишка. Разрешается передвигать фишку либо в соседнюю точку, либо в диаметрально противоположную точку. Сколько способов существует обойти все точки по одному разу и вернуться в A_1?

Ответ: 122.

12.1. Четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4, BC = 5, CD = 6$ и $DA = 7$ вписан в окружность. Точки A_1 и C_1 — основания перпендикуляров, проведённых к диагонали BD из вершин A и C соответственно. Точки B_1 и D_1 — основания перпендикуляров, проведённых к диагонали AC из вершин B и D соответственно. Найдите периметр четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$. Представьте его в виде несократимой дроби $\dfrac{m}{n}$ и в ответ запишите значение $m + n$.

Ответ: 301.

Решение. Пусть $\angle COD = \varphi$. Вычислим $\cos\varphi$. Для этого удобно «перекроить» четырёхугольник $ABCD$. Пусть точка D' симметрична точке D относительно серединного перпендикуляра к отрезку AC.



Точки A, B, C, D, D' лежат на одной окружности, причём $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AD'}$ и $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CD'}$. (Здесь $\overset{\frown}{XY}$ обозначает дугу окружности с концами X и Y). Поэтому

$$\varphi = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AD'}}{2} = \angle BCD'.$$

Теперь запишем теорему косинусов для треугольников ABD' и BCD':

$$D'B^2 = AB^2 + D'A^2 - 2 \cdot AB \cdot D'A \cdot \cos(\pi - \varphi);$$

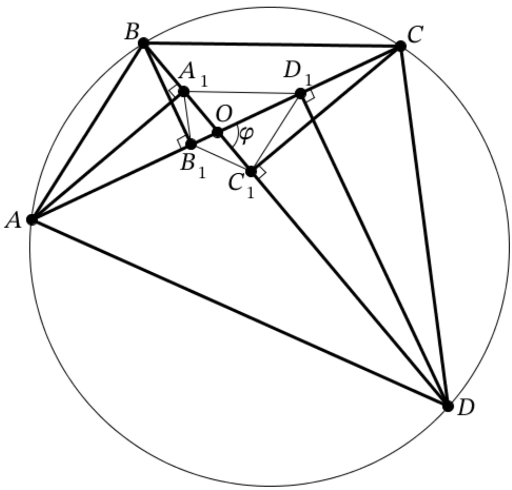
$$D'B^2 = BC^2 + D'C^2 - 2 \cdot BC \cdot D'C \cdot \cos\varphi.$$

Приравняв правые части этих двух равенств и воспользовавшись равенством $\cos(\pi-\varphi) = -\cos\varphi$, получаем линейное уравнение на $\cos\varphi$. Выразим этот косинус:

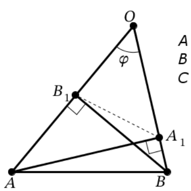
$$\cos\varphi = \frac{BC^2 + D'C^2 - AB^2 - D'A^2}{2(BC \cdot D'C + AB \cdot D'A)}.$$

Подставив численные значения, находим $\cos\varphi = \frac{11}{59}$. Нам потребуется не только само это значение, но и то, что $\cos\varphi > 0$, то есть что угол φ острый.

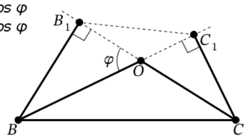
Вернёмся к задаче.



Заметим, что $\triangle ABO \sim \triangle A_1B_1O$, $\triangle BCO \sim \triangle B_1C_1O$, $\triangle CDO \sim \triangle C_1D_1O$ и $\triangle DAO \sim \triangle D_1A_1O$, причём коэффициенты всех четырёх подобий равны $\cos\varphi$ (здесь мы пользуемся тем, что угол φ острый). Доказательство для двух подобий следует из картинки ниже, для двух оставшихся подобий аналогично.



$A_1O = AO \cdot \cos\varphi$
$B_1O = BO \cdot \cos\varphi$
$C_1O = CO \cdot \cos\varphi$



Из сказанного следует, что периметр $A_1B_1C_1D_1$ равен периметру $ABCD$, умноженному на $\cos\varphi$. Остаётся лишь провести тривиальные вычисления.

12.2. Четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 5, BC = 6, CD = 7$ и $DA = 8$ вписан в окружность. Точки A_1 и C_1 — основания перпендикуляров, проведённых к диагонали BD из вершин A и C соответственно. Точки B_1 и D_1 — основания перпендикуляров, проведённых к диагонали AC из вершин B и D соответственно. Найдите периметр четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$. Представьте его в виде несократимой дроби $\dfrac{m}{n}$ и в ответ запишите значение $m + n$.

Ответ: 421.

12.3. Четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 5, BC = 6, CD = 8$ и $DA = 9$ вписан в окружность. Точки A_1 и C_1 — основания перпендикуляров, проведённых к диагонали BD из вершин A и C соответственно. Точки B_1 и D_1 — основания перпендикуляров, проведённых к диагонали AC из вершин B и D соответственно. Найдите периметр четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$. Представьте его в виде несократимой дроби $\dfrac{m}{n}$ и в ответ запишите значение $m + n$.

Ответ: 243.

12.4. Четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4, BC = 5, CD = 8$ и $DA = 9$ вписан в окружность. Точки A_1 и C_1 — основания перпендикуляров, проведённых к диагонали BD из вершин A и C соответственно. Точки B_1 и D_1 — основания перпендикуляров, проведённых к диагонали AC из вершин B и D соответственно. Найдите периметр четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$. Представьте его в виде несократимой дроби $\dfrac{m}{n}$ и в ответ запишите значение $m + n$.

Ответ: 415.