Дистанционная диагностическая работа, решения

1.1. Пусть a и b — корни многочлена $x^2 + 2020x + c$, причем известно, что $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 98$. Найдите $\sqrt{c}$.

Ответ: 202.

Решение. По теореме Виета $a + b = -2020, ab = c$. Тогда

$$98 = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{(a+b)^2}{ab} - 2 = \frac{(2020)^2}{c} - 2,$$

а значит $c = \frac{(2020)^2}{100}$, т.е. $\sqrt{c} = 202$.

1.2. Пусть a и b — корни многочлена $x^2 + 2024x + c$, причем известно, что $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 62$. Найдите $\sqrt{c}$.

Ответ: 253.

1.3. Пусть a и b — корни многочлена $x^2 + 2022x + c$, причем известно, что $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 34$. Найдите $\sqrt{c}$.

Ответ: 337.

1.4. Пусть a и b — корни многочлена $x^2 + 2025x + c$, причем известно, что $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 223$. Найдите $\sqrt{c}$.

Ответ: 135.

2.1. У Васи есть карточки четырёх типов, на каждой карточке написано число — $1, 4, 7$ или 10, карточек каждого типа неограниченное количество. Вася выбирает 12 карточек так, чтобы карточки каждого типа присутствовали, и складывает значения на них. Сколько различных сумм у него могло получиться?

Ответ: 25.

Решение. Так как в каждом наборе из 12 карточек присутствую карточки 1,4,7 и 10, то можно считать, что мы выбираем 8 карточек, среди которых не обязательно встречается карточка каждого типа. Так как 1,4,7 и 10 дают остаток 1 при делении на 3, то сумма наших восьми чисел даёт остаток 2 при делении на 3 и лежит в промежутке от 8 (восемь карточек 1) до 80 (восемь карточек 10) — всего таких чисел 25. Каждое из них можно получить: начнём с набора из восьми единиц, дальше будем находить число, меньшее 10, и прибавлять к нему 3. Сделаем это столько раз, чтобы получить интересующую нас сумму.

2.2. У Васи есть карточки четырёх типов, на каждой карточке написано число — $1, 4, 7$ или 10, карточек каждого типа неограниченное количество. Вася выбирает 11 карточек так, чтобы карточки каждого типа присутствовали, и складывает значения на них. Сколько различных сумм у него могло получиться?

Ответ: 22.

2.3. У Васи есть карточки четырёх типов, на каждой карточке написано число — $1, 4, 7$ или 10, карточек каждого типа неограниченное количество. Вася выбирает 10 карточек так, чтобы карточки каждого типа присутствовали, и складывает значения на них. Сколько различных сумм у него могло получиться?

Ответ: 19.

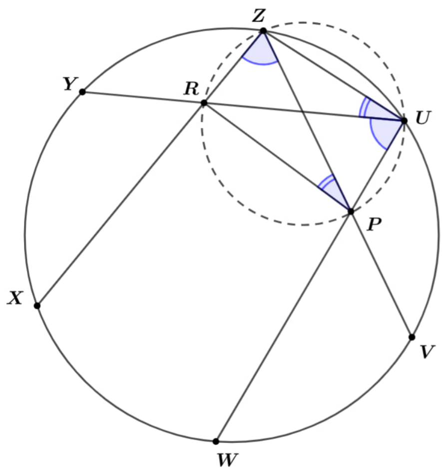
2.4. У Васи есть карточки четырёх типов, на каждой карточке написано число — $1, 4, 7$ или 10, карточек каждого типа неограниченное количество. Вася выбирает 13 карточек так, чтобы карточки каждого типа присутствовали, и складывает значения на них. Сколько различных сумм у него могло получиться?

Ответ: 28.

3.1. В окружность вписан шестиугольник $XYZUVW$. Известно, что дуга YZ, не содержащая точку U, равна 62°, дуга VX, содержащая точку W, равна 87°, а дуга ZW, содержащая точки U и V, равна 211°. Хорды ZV и UW пересекаются в точке P, а хорды ZX и YU — в точке R. Чему равен угол ZPR?

Ответ: 31°.

Решение. Заметим, что дуга WY, содержащая точку X, дополняет дуги YZ и ZW, данные в условии, до целой окружности, и равна $360^\circ - 62^\circ - 211^\circ = 87^\circ$. Получается, что градусные меры дуг WY и XV совпадают, а значит, равны и опирающиеся на них углы YUW и XZV. Осталось заметить, что равенство этих углов означает вписанность четырёхугольника $RZUP$. Тогда $\angle ZPR = \angle ZUR = \angle ZUY$, который опирается на дугу YZ, данную в условии, т.е. $\angle ZPR = 31^\circ$.



3.2. В окружность вписан шестиугольник $XYZUVW$. Известно, что дуга YZ, не содержащая точку U, равна 68°, дуга VX, содержащая точку W, равна 85°, а дуга ZW, содержащая точки U и V, равна 207°. Хорды ZV и UW пересекаются в точке P, а хорды ZX и YU — в точке R. Чему равен угол ZPR?

Ответ: 34°.

3.3. В окружность вписан шестиугольник $XYZUVW$. Известно, что дуга YZ, не содержащая точку U, равна $52°$, дуга VX, содержащая точку W, равна $109°$, а дуга ZW, содержащая точки U и V, равна $199°$. Хорды ZV и UW пересекаются в точке P, а хорды ZX и YU — в точке R. Чему равен угол ZPR?

Ответ: $26°$.

3.4. В окружность вписан шестиугольник $XYZUVW$. Известно, что дуга YZ, не содержащая точку U, равна $74°$, дуга VX, содержащая точку W, равна $122°$, а дуга ZW, содержащая точки U и V, равна $164°$. Хорды ZV и UW пересекаются в точке P, а хорды ZX и YU — в точке R. Чему равен угол ZPR?

Ответ: $37°$.

4.1. При каком наименьшем натуральном n найдется многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что у него есть 6 различных целых корней и при этом уравнение $P(x) = n$ имеет хотя бы одно целое решение?

Ответ: 36.

Решение. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_6$ — целочисленные корни $P(x)$. Тогда

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_6)Q(x),$$

где $Q(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Пусть b — целочисленный корень уравнения $P(x) = n$. Тогда

$$n = (b - a_1)(b - a_2)\ldots(b - a_6)Q(b).$$

Тогда

$$n \geqslant |(b - a_1)(b - a_2)\ldots(b - a_6)| \geqslant 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36,$$

т.к. $b - a_1, b - a_2, \ldots, b - a_6$ — различные целые ненулевые числа.

Осталось заметить, что при $n = 36$ подходят многочлен

$$P(x) = -(x - 3)(x - 2)(x - 1)(x + 1)(x + 2)(x + 3)$$

и $b = 0$.

4.2. При каком наименьшем натуральном n найдется многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что у него есть 7 различных целых корней и при этом уравнение $P(x) = n$ имеет хотя бы одно целое решение?

Ответ: 144.

4.3. При каком наименьшем натуральном n найдется многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что у него есть 8 различных целых корней и при этом уравнение $P(x) = n$ имеет хотя бы одно целое решение?

Ответ: 576.

4.4. При каком наименьшем натуральном n найдется многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что у него есть 9 различных целых корней и при этом уравнение $P(x) = n$ имеет хотя бы одно целое решение?

Ответ: 2880.

5.1. Для каждого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ возьмем $x_n = n^2+300$ и $y_n = \text{НОД}(x_n, x_{n+1})$. Чему равно максимально возможное значение y_n?

Ответ: 1201.

Решение. Будем пользоваться соотношениями

$$\text{НОД}(u, v) = \text{НОД}(u \pm v, v), \text{НОД}(u, 2v + 1) = \text{НОД}(2u, 2v + 1).$$

Запишем цепочку равенств:

$$\text{НОД}(n^2 + 300, (n + 1)^2 + 300) = \text{НОД}(n^2 + 300, 2n + 1) = \text{НОД}(2n^2 + 600, 2n + 1) =$$

$$= \text{НОД}(600 - n, 2n + 1) = \text{НОД}(1200 - 2n, 2n + 1) = \text{НОД}(1201, 2n + 1).$$

Остается заметить, что последняя величина не превосходит 1201, и равенство достигается при $n = 600$.

5.2. Для каждого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ возьмем $x_n = n^2+250$ и $y_n = \text{НОД}(x_n, x_{n+1})$. Чему равно максимально возможное значение y_n?

Ответ: 1001.

5.3. Для каждого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ возьмем $x_n = n^2+400$ и $y_n = \text{НОД}(x_n, x_{n+1})$. Чему равно максимально возможное значение y_n?

Ответ: 1601.

5.4. Для каждого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ возьмем $x_n = n^2+500$ и $y_n = \text{НОД}(x_n, x_{n+1})$. Чему равно максимально возможное значение y_n?

Ответ: 2001.

6.1. Фишка начинает свой путь в левой верхней клетке квадрата 12×12. За один ход фишка может сходить либо на одну клетку вниз, либо на одну клетку вправо. Назовём *поворотом* ход вниз, который следует сразу за ходом вправо, или же ход вправо, который следует сразу за ходом вниз. Сколькими способами фишка может дойти до правого нижнего угла, если ей нужно сделать ровно 6 поворотов?

Ответ: 10800.

Решение. Представим путь фишки как последовательность из 22 ходов, 11 из которых вправо, а 11 — вниз. Поворот — это момент, когда в этой последовательности меняется тип хода («вправо» или «вниз»). Значит наша последовательность разбита на 7 непустых участков — на четырёх участках с нечётными номерами суммарно находятся все ходы одного типа, а на трёх участках с чётными номерами — другого. Посчитаем число способов разбить ходы одного типа на 4 участка: у нас есть 11 «шаров» (ходы одного типа) и между ними есть 10 мест для трёх «перегородок», которые делят все ходы на 4 участка – тогда количество способов расставить перегородки равно C_{10}^3. Аналогично число способов разбить ходы одного типа на 3 участка равно C_{10}^2. Учитывая, что на первом участке могут быть либо ходы вправо, либо ходы вниз, получаем, что всего способов $2 \cdot C_{10}^3 \cdot C_{10}^2 = 10800$.

6.2. Фишка начинает свой путь в левой верхней клетке квадрата 12×12. За один ход фишка может сходить либо на одну клетку вниз, либо на одну клетку вправо.

Назовём *поворотом* ход вниз, который следует сразу за ходом вправо, или же ход вправо, который следует сразу за ходом вниз. Сколькими способами фишка может дойти до правого нижнего угла, если ей нужно сделать ровно 7 поворотов?

Ответ: 28800.

6.3. Фишка начинает свой путь в левой верхней клетке квадрата 11×11. За один ход фишка может сходить либо на одну клетку вниз, либо на одну клетку вправо. Назовём *поворотом* ход вниз, который следует сразу за ходом вправо, или же ход вправо, который следует сразу за ходом вниз. Сколькими способами фишка может дойти до правого нижнего угла, если ей нужно сделать ровно 6 поворотов?

Ответ: 6048.

6.4. Фишка начинает свой путь в левой верхней клетке квадрата 11×11. За один ход фишка может сходить либо на одну клетку вниз, либо на одну клетку вправо. Назовём *поворотом* ход вниз, который следует сразу за ходом вправо, или же ход вправо, который следует сразу за ходом вниз. Сколькими способами фишка может дойти до правого нижнего угла, если ей нужно сделать ровно 7 поворотов?

Ответ: 14112.

7.1. Вершины квадрата $XYZT$ находятся на различных сторонах ромба $ABCD$. Известно, что $XY = 73, AC > BD$, и что AC и BD — натуральные. Найдите AC.

Ответ: 5402.

Решение. Докажем, что стороны квадрата $XYZT$ параллельны диагоналям ромба. Для начала сделаем центральную симметрию в центре квадрата. Тогда понятно, что при такой симметрии стороны ромба обязаны перейти друг в друга. Значит у квадрата и ромба совпадает центр. Тогда если сделать поворот на 90° в их общем центре (назовём его точкой O), то ясно, что вершины нашего квадрата — это точки пересечения ромба и ромба, повёрнутого на 90°, что и требовалось.

Рассмотрим треугольник AOB (см. рисунок):

$$\frac{AC}{2} \cdot \frac{BD}{2} = AO \cdot BO = 2S_{AOB} = 2S_{AXO} + 2S_{BXO} = \frac{XY}{2} \cdot \frac{AC}{2} + \frac{XY}{2} \cdot \frac{BD}{2},$$

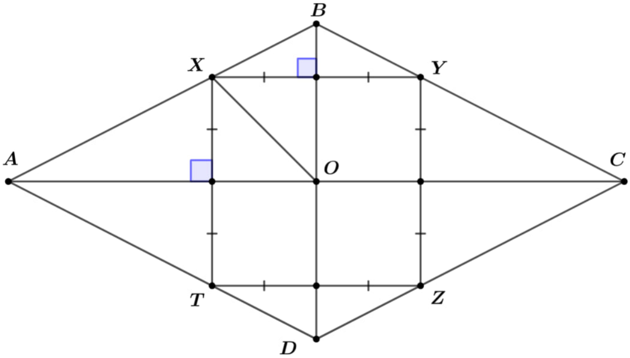
т.е.

$$AC \cdot BD - XY(AC + BD) = 0 \Leftrightarrow (AC - XY)(BD - XY) = XY^2,$$

а значит

$$(AC - 73)(BD - 73) = 73^2.$$

Так как $AC - 73$ и $BD - 73$ — два неравных натуральных числа, причём $AC - 73$ — большее из них, то $AC - 73 = 73^2$, следовательно, $AC = 5402$.



7.2. Вершины квадрата $XYZT$ находятся на различных сторонах ромба $ABCD$. Известно, что $XY = 71, AC > BD$, и что AC и BD — натуральные. Найдите AC.

Ответ: 5112.

7.3. Вершины квадрата $XYZT$ находятся на различных сторонах ромба $ABCD$. Известно, что $XY = 67, AC > BD$, и что AC и BD — натуральные. Найдите AC.

Ответ: 4556.

7.4. Вершины квадрата $XYZT$ находятся на различных сторонах ромба $ABCD$. Известно, что $XY = 79, AC > BD$, и что AC и BD — натуральные. Найдите AC.

Ответ: 6320.

8.1. Рассмотрим числа вида $a_k = \frac{k^2-2}{k^2-k+2}$, где $k = 1, 2, \ldots, 100$. Сколько среди них различных?

Ответ: 98.

Решение. Предположим, что для некоторых различных натуральных чисел m и n выполнено $a_m = a_n$. Тогда

$$\frac{m^2-2}{m^2-m+2} = \frac{n^2-2}{n^2-n+2}.$$

Приводя дроби к общему знаменателю и раскрывая скобки, получаем

$$nm^2 - mn^2 + 4n^2 - 4m^2 - 2n + 2m = 0 \Leftrightarrow (m-n)(mn - 4(m+n) + 2) = 0.$$

Так как $m \neq n$, то

$$0 = mn - 4(m+n) + 2 \Leftrightarrow (m-4)(n-4) = 14 = 2 \cdot 7.$$

У данного уравнения 4 решения в натуральных числах (m, n): (5, 18), (18, 5), (6, 11), (11, 6). Поэтому из всех чисел a_k равны между собой только $a_5 = a_{18}$ и $a_6 = a_{11}$. Значит, у нас будет $100 - 2 = 98$ различных чисел.

8.2. Рассмотрим числа вида $a_k = \frac{k^2-22}{k^2-k-16}$, где $k = 2, 3, \ldots, 100$. Сколько среди них различных?

Ответ: 97.

8.3. Рассмотрим числа вида $a_k = \frac{k^2-6}{k^2-k-2}$, где $k = 3, 4, \ldots, 100$. Сколько среди них различных?

Ответ: 96.

8.4. Рассмотрим числа вида $a_k = \frac{k^2-21}{k^2-k-15}$, где $k = 5, 6, \ldots, 100$. Сколько среди них различных?

Ответ: 94.

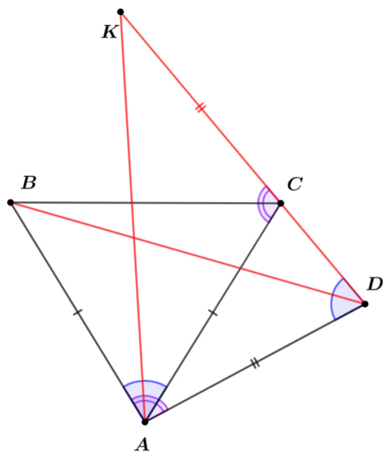
9.1. В четырёхугольнике $ABCD$ углы $\angle ABC = \angle BCA = 56°$, а $\angle ADC$ равен $68°$. Кроме того, известно, что $DA + DC = DB$. Найдите $\angle BDA$.

Ответ: $44°$.

Решение. Заметим, что $\angle BAC = 180° - \angle ABC - \angle BCA = 68° = \angle ADC$. На продолжении DC за точку C отметим такую точку K, что $CK = DA$. Заметим, что треугольники ADB и CKA равны, так как $AD = CK, AB = CA$ и

$$\angle KCA = \angle CAD + \angle ADC = \angle CAD + \angle BAC = \angle BAD.$$

Получаем, что $AK = BD = KC + CD = KD$, откуда $\angle KAD = \angle KDA$. Таким образом, $\angle BDA = \angle AKD = 180° - 2\angle KDA = 44°$.



9.2. В четырёхугольнике $ABCD$ $\angle ABC = \angle BCA = 57°$, а $\angle ADC$ равен $66°$. Кроме того, известно, что $DA + DC = DB$. Найдите $\angle BDA$.

Ответ: $48°$.

9.3. В четырёхугольнике $ABCD$ $\angle ABC = \angle BCA = 58°$, а $\angle ADC$ равен $64°$. Кроме того, известно, что $DA + DC = DB$. Найдите $\angle BDA$.

Ответ: $52°$.

9.4. В четырёхугольнике $ABCD$ $\angle ABC = \angle BCA = 59°$, а $\angle ADC$ равен $62°$. Кроме того, известно, что $DA + DC = DB$. Найдите $\angle BDA$.

Ответ: $56°$.

10.1. Пусть p — положительное вещественное решение уравнения $\{x[x]\} = 2021\{x\}$, не являющееся целым числом. Петя выписывает на доску в порядке возрастания все возможные значения $[p]$ (каждое возможное значение выписывается ровно один раз). Какое число он выписал вторым?

Целая часть $[x]$ числа x — это наибольшее целое число, не превосходящее x. Дробная часть $\{x\}$ числа x — это разность между самим числом и его целой частью.

Ответ: 4043.

Решение. Во-первых заметим, что $2021\{x\}$ — дробная часть некоторого числа, в частности $\{x\} < 1/2021$. Во-вторых заметим, что

$$\{x[x]\} = \{([x] + \{x\})[x]\} = \{[x]^2 + [x]\{x\}\} = \{[x]\{x\}\},$$

т.е.

$$\{[x]\{x\}\} = 2021\{x\} \Leftrightarrow [x]\{x\} - n = 2021\{x\},$$

где n — целое неотрицательное число. Тогда

$$\{x\}([x] - 2021) = n.$$

Если $[x] - 2021 = 0$, то под условие подойдёт любое нецелое число с целой частью равной 2021. Пусть теперь $[x] - 2021 \neq 0$, тогда

$$\{x\} = \frac{n}{[x] - 2021} \Rightarrow \frac{n}{[x] - 2021} < \frac{1}{2021} \Leftrightarrow 2021n + 2021 < [x].$$

Значит, минимальное возможное значение $[x]$ (кроме 2021) равно 4043. Число $x = 4043 + \frac{1}{2022}$ подходит под условие, следовательно, ответ — 4043.

10.2. Пусть p — положительное вещественное решение уравнения $\{x[x]\} = 2022\{x\}$, не являющееся целым числом. Петя выписывает на доску в порядке возрастания все возможные значения $[p]$ (каждое возможное значение выписывается ровно один раз). Какое число он выписал вторым?

Целая часть $[x]$ числа x — это наибольшее целое число, не превосходящее x. Дробная часть $\{x\}$ числа x — это разность между самим числом и его целой частью.

Ответ: 4045.

10.3. Пусть p — положительное вещественное решение уравнения $\{x[x]\} = 2023\{x\}$, не являющееся целым числом. Петя выписывает на доску в порядке возрастания все возможные значения $[p]$ (каждое возможное значение выписывается ровно один раз). Какое число он выписал вторым?

Целая часть $[x]$ числа x — это наибольшее целое число, не превосходящее x. Дробная часть $\{x\}$ числа x — это разность между самим числом и его целой частью.

Ответ: 4047.

10.4. Пусть p — положительное вещественное решение уравнения $\{x[x]\} = 2024\{x\}$, не являющееся целым числом. Петя выписывает на доску в порядке возрастания все возможные значения $[p]$ (каждое возможное значение выписывается ровно один раз). Какое число он выписал вторым?

Целая часть $[x]$ числа x — это наибольшее целое число, не превосходящее x. Дробная часть $\{x\}$ числа x — это разность между самим числом и его целой частью.

Ответ: 4049.

11.1. Дан квадрат $HELP$. Внутри него выбрали точку X. Оказалось, что $\angle EXL = 135°$, а длины отрезков HX и LX равны 12 и 4 соответственно. Найдите EX.

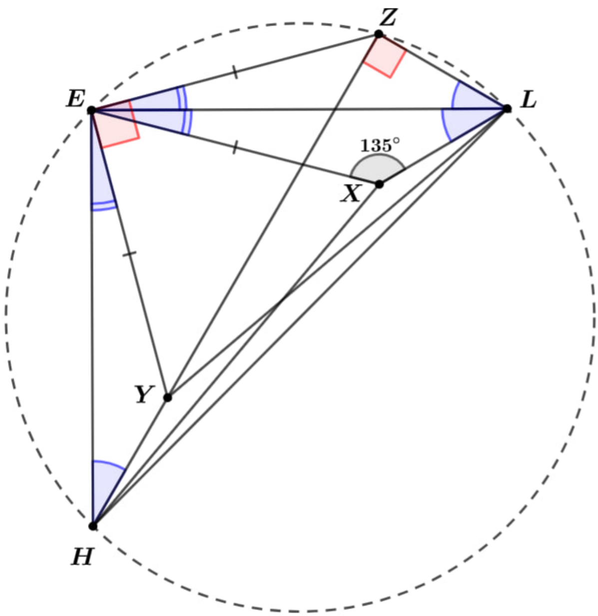
Ответ: 8.

Решение. Будем рассматривать только треугольник HEL. Пусть Y — симметрична точке X относительно серединного перпендикуляра к HL, а Z — симметрична X относительно EL (см. рисунок).

Так как $\angle EHL + \angle EZL = \angle EHL + \angle EXL = 45° + 135°$, то четырёхугольник $HEZL$ — вписанный. Тогда $\angle EHZ = \angle ELZ = \angle ELX$. Также в силу симметрии $\angle EHY = \angle ELX$, то есть $\angle EHY = \angle EHZ \Rightarrow H, Y, Z$ — одна прямая.

В силу симметрии $\angle HEY = \angle XEL = \angle LEZ \Rightarrow \angle YEZ = \angle HEL = 90°$, т.е. треугольник YEZ — равнобедренный и прямоугольный.

Пусть $EX = a$. Рассмотрим треугольник YZL. Из вписанности получаем, что $\angle YZL = \angle HEL = 90°$. $ZL = XL = 4, YL = HX = 12$. Из треугольника YEZ получаем, что $YZ = \sqrt{2}a$. Тогда по теореме Пифагора для треугольника YZL получаем, что $2a^2 + 16 = 144$, т.е. $a = 8$.



11.2. Дан квадрат $HELP$. Внутри него выбрали точку X. Оказалось, что $\angle EXL = 135°$, а длины отрезков HX и LX равны 11 и 7 соответственно. Найдите EX.

Ответ: 6.

11.3. Дан квадрат $HELP$. Внутри него выбрали точку X. Оказалось, что $\angle EXL = 135°$, а длины отрезков HX и LX равны 27 и 23 соответственно. Найдите EX.

Ответ: 10.

11.4. Дан квадрат $HELP$. Внутри него выбрали точку X. Оказалось, что $\angle EXL = 135°$, а длины отрезков HX и LX равны 17 и 1 соответственно. Найдите EX.

Ответ: 12.

12.1. На плоскости отмечено 10 точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Пусть N — число способов провести 22 отрезка между отмеченными точками, чтобы не образовалось треугольника с вершинами в отмеченных точках. Найдите $\frac{N}{7!}$.

Ответ: 69.

Решение. Рассмотрим граф, где вершины — это точки, а рёбра — это проведённые между ними отрезки. Докажем, что в условиях задачи такой граф обязан быть двудольным.

Предположим противное. Тогда в этом графе должен быть нечётный цикл, причём длинны минимум 5. Рассмотрим минимальный по длине нечётный цикл. Тогда между вершинами этого цикла нет рёбер.

Если длина этого цикла 9, то ясно, что в графе не больше чем $9 + 9 = 18 < 22$ рёбер, противоречие.

Если длина этого цикла 7, то от любой вершины не из цикла в цикл ведёт максимум 3 ребра (иначе образуется треугольник). Следовательно всего рёбер в графе не больше чем $7 + 3 \cdot 3 + 3 = 19 < 22$ рёбер, противоречие.

Если длина этого цикла 5, то от любой вершины не из цикла в цикл ведёт максимум 2 ребра (иначе образуется треугольник). Следовательно между оставшимися 5-ю вершинами должно быть минимум $22 - 5 - 5 \cdot 2 = 7$ рёбер. Рассмотри подграф на этих вершинах. В нём точно есть цикл. Если он длины 5, то больше рёбер в графе быть не может, противоречие. Следовательно, он длины 4, но тогда из пятой вершины в него ведёт максимум 2 ребра (иначе образуется треугольник), $2 + 4 < 7$, противоречие. Значит, наш граф действительно двудольный.

Тогда в двух долях либо 5 и 5 вершин, либо 6 и 4 (иначе максимальное число рёбер между долями равно $7 \cdot 3 = 21 < 22$). Тогда разбить вершины на две доли по 5 – это $\frac{C_{10}^5}{2}$ способов, а далее надо выбрать из 25 возможных рёбер между этими долями 22, это C_{25}^3 способов. Разбить вершины на доли по 6 и 4 — это C_{10}^4 способов, а далее надо выбрать из 24 возможных рёбер между этими долями 22, это C_{24}^2 способов. Не трудно убедиться, что все рассмотренные способы проведения рёбер различны: связный двудольный граф единственным образом разбивается на доли. Следовательно $N = \frac{C_{10}^5}{2} \cdot C_{25}^3 + C_{10}^4 \cdot C_{24}^2$. Тогда $\frac{N}{7!} = 69$.