

Поляры

Определение и основные свойства

Рассмотрим окружность ω с центром O и точку P , отличную от O . Полярной точки P относительно ω называется прямая ℓ , которая проходит через инверсную точку P' перпендикулярно прямой OP . Точка P называется полюсом прямой ℓ .

Везде далее мы будем считать, что мы находимся на проективной плоскости. Доопределим понятие поляры для O и бесконечно удалённых точек. Полярной O будем считать бесконечно удалённую прямую. Полярной бесконечно удалённой точки будем считать прямую, которая проходит через центр окружности перпендикулярно направлению, соответствующему бесконечно удалённой точке. Несложно видеть, что получилась биекция между точками и прямыми на проективной плоскости.

Доказательства всех лемм мы будем проводить для точек, отличных от центра и бесконечно удалённых. Проверка того, что леммы справедливы для них, оставляется читателю в качестве упражнения.

Поляру точки P можно определить по-другому. А именно, полярной точки P назовём множество точек Q таких, что $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = r^2$, где r — радиус окружности ω . Действительно, если Q' — проекция Q на прямую OP , то

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ'},$$

а на прямой OP существует единственная точка, удовлетворяющая этому равенству — это точка, инверсная P . Таким образом, проекции на прямую OP всех подходящих точек Q попадают в одну и ту же точку. И понятно, что если через инверсный образ точки P провести прямую, перпендикулярную OP , то любая точка на ней будет удовлетворять равенству.

Это определение позволяет доказать важное свойство поляр.

Лемма 1. Если P лежит на поляре Q , то Q лежит на поляре P .

Доказательство. Заметим, что в формулу $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = r^2$ точки P и Q входят равноправно. Поэтому оба условия из формулировки леммы равносильны выполнению этого равенства, то есть равносильны между собой. $\square$

Иногда говорят, что точки P и Q сопряжены относительно ω , если относительно неё они лежат на полярах друг друга.

Лемма 2. Точки A , B , C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда их поляры a , b , c пересекаются в одной точке.

Доказательство. Пусть точки A, B, C лежат на прямой ℓ . Рассмотрим полюс L прямой ℓ . Так как точки A, B, C лежат на поляре точки L , то по лемме 1 их поляры проходят через L , то есть пересекаются в одной точке.

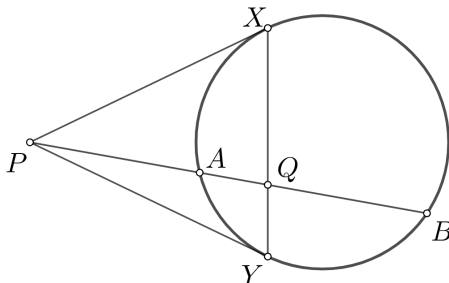
Пусть поляры a, b, c пересекаются в точке L . Поскольку поляры точек A, B, C проходят через L , то они все лежат на поляре ℓ точки L , то есть на одной прямой. $\square$

Леммы 1 и 2 дают основной метод применения поляр в задачах — «жонглирование» тем, какие точки с какими сопряжены.

Перейдём к способам поиска сопряжённых относительно окружности точек. Несложно понять, что построить полярю точки P , лежащей вне ω , можно следующим образом: провести касательные PX и PY , тогда XY и будет полярю.

Лемма 3. Через точку P проведена секущая, пересекающая окружность ω в точках A и B , а её полярю — в точке Q . Тогда $(A, B; P, Q) = -1$.

Доказательство. Если две точки сопряжены относительно окружности, то хотя бы одна из них лежит вне окружности, пусть P . Проведём из P касательные PX и PY , тогда точка пересечения прямых XY и AB лежит на поляре P , то есть это точка Q .



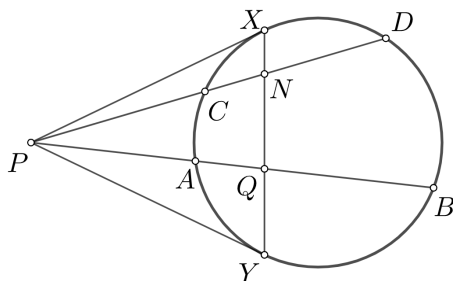
Тогда $AXBY$ гармонический четырёхугольник. Спроецировав его вершины из точки X на прямую AB , получим

$$-1 = (A, B; X, Y) \stackrel{X}{=} (A, B; P, Q),$$

что и требовалось доказать. $\square$

Лемма 4. Через точку P проведены две секущие, пересекающие окружность ω в точках A и B, C и D . Тогда точки пересечения пар прямых AC и BD, AD и BC лежат на поляре точки P относительно ω .

Доказательство. Пусть P лежит вне ω . Проведём из неё касательные PX и PY . Пусть прямая XY пересекает прямые AB и CD в точках M и N .



По лемме 3 четвёрки $(A, B; P, M)$ и $(C, D; P, N)$ гармонические, то есть их двойные отношения равны. Как известно, в этом случае прямые AC , BD и MN пересекаются в одной точке.

Как известно, в гармонической четвёрке точек можно поменять первые точки местами и она останется гармонической. Тогда

$$(A, B; P, M) = (B, A; P, M) = (C, D; P, N),$$

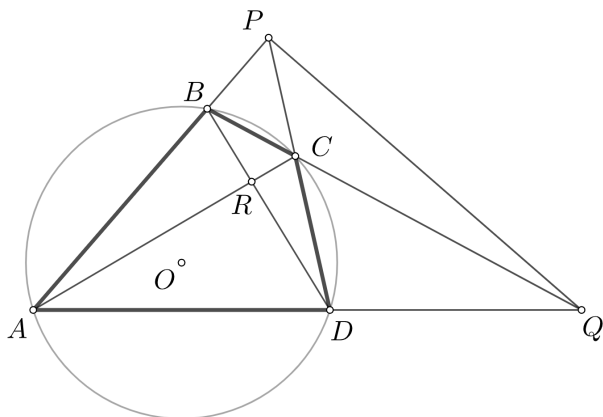
откуда прямые BC , AD , MN пересекаются в одной точке. Таким образом, точки пересечения пар прямых AC и BD , AD и BC лежат на прямой XY , то есть на поляре точки P .

Если точка P лежит внутри ω , то точки пересечения прямых AC и BD , AD и BC лежат вне ω , поэтому по доказанному ранее точка P будет лежать на их полярах, то есть будет с ними сопряжена. Но тогда и они будут лежать на поляре точки P . $\square$

Примеры

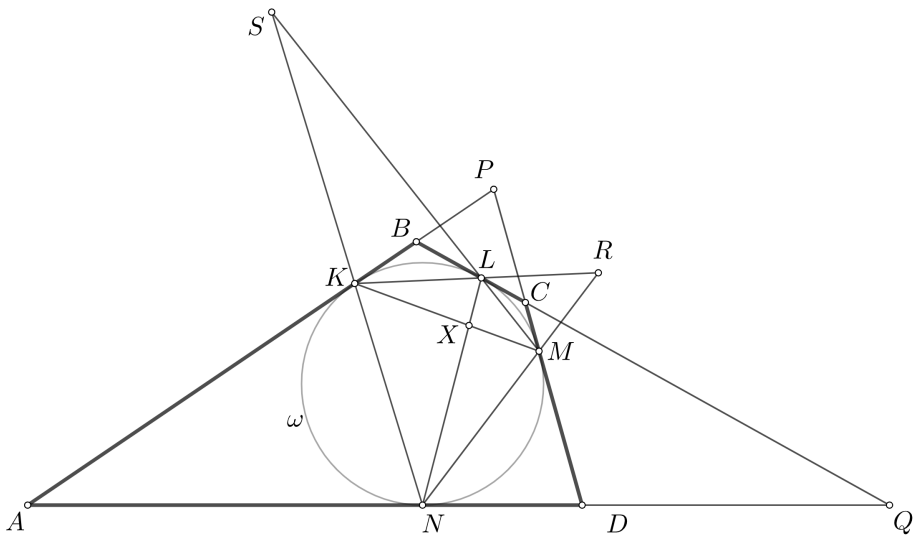
Пример 1. Четырёхугольник вписан в окружность с центром O . Обозначим точки пересечения противоположных сторон и точку пересечения диагоналей четырёхугольника через P , Q и R . Докажите, что O — ортоцентр треугольника PQR .

Решение. По лемме 4 прямая PQ — поляра точки R , поэтому $PQ \perp OR$. Аналогично $PR \perp OQ$, поэтому O — ортоцентр PQR . $\square$



Пример 2. Докажите, что в описанном четырёхугольнике точка пересечения диагоналей совпадает с точкой пересечения диагоналей четырёхугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами.

Решение. Введём обозначения, как показано на рисунке.



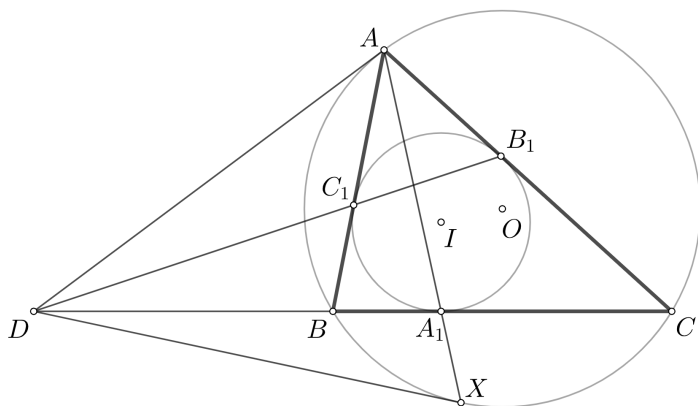
Из точки P проведены касательные PK и PM к ω , точка X лежит на KM , поэтому X и P сопряжены относительно ω . Аналогично X и Q сопряжены.

Из точки S проведены секущие SKN и SLM , точка X — пересечение KM и LN , поэтому S и X сопряжены. Аналогично R и X сопряжены. Таким образом, точки P, Q, R, S лежат на поляре точки X , то есть на одной прямой. Следовательно, поляры этих точек пересекаются в одной точке.

Поляры точек P и Q — это прямые KM и LN соответственно. Точка S лежит на полярах точек A и C , поэтому AC — поляра точки S . Аналогично BD — поляра точки R . Тогда эти прямые пересекаются в одной точке, что доказывает утверждение задачи. □

Пример 3. В треугольнике ABC вписанная окружность ω касается сторон AB и AC в точках C_1 и B_1 . Оказалось, что прямые BC , B_1C_1 и касательная к (ABC) в точке A пересекаются в одной точке D . Докажите, что D лежит на прямой, соединяющей центры ω и (ABC) .

Решение. Поскольку прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке, то четвёрка $(B, C; A_1, D)$ гармоническая. С другой стороны, для точки пересечения касательной к описанной окружности с противоположной стороной точкой, которая дополняет до гармонической четвёрки, является основание симедианы. Таким образом, условие задачи эквивалентно тому, что AA_1 — симедиана.



Точка D лежит на поляре B_1C_1 точки A и на поляре BC точки A_1 относительно ω . Следовательно, AA_1 — поляра D относительно ω .

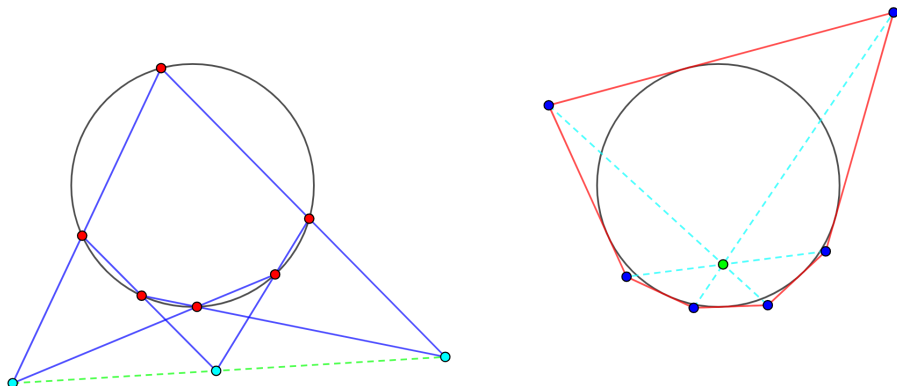
Поскольку AA_1 — симедиана, то вторая точка пересечения X с (ABC) такова, что $ABXC$ — гармонический четырёхугольник. Тогда касательные в точках A и X пересекаются на прямой BC , то есть DX — касательная к (ABC) . Следовательно, AX — поляра D относительно (ABC) .

Таким образом, поляры D относительно ω и (ABC) совпадают. Тогда $ID \perp AA_1$ и $OD \perp AA_1$, то есть точки D, I, O лежат на одной прямой. $\square$

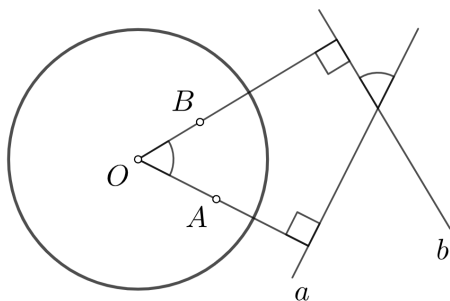
Полярное преобразование

Отношение «полюс–поляра» задаёт биекцию между точками и прямыми на проективной плоскости. Замена точек на соответствующие им прямые и наоборот называется *полярным преобразованием*. При полярном преобразовании одни утверждения переходят в другие. Классическим примером является теоремы Паскаля и Брианшона.

Упражнение. Осознайте, что теоремы Паскаля и Брианшона переходят друг в друга при полярном преобразовании.



При полярном преобразовании сохраняются углы. Более конкретно, если a и b — поляры точек A и B , то из того, что $a \perp OA$ и $b \perp OB$ следует, что $\angle(OA, OB) = \angle(a, b)$. Это позволяет следить за углами при полярном преобразовании.



Упражнение. Во что перейдёт лемма об изогоналях, если сделать полярное преобразование относительно вершины угла?

Из того, что углы сохраняются, следует, что при полярном преобразовании сохраняются двойные отношения. Действительно, пусть прямые a, b, c, d пересекаются в одной точке. Тогда

$$(a, b; c, d) = (OA, OB; OC, OD) = (A, B; C, D),$$

где первое равенство следует из того, что углы между соответствующими парами прямых равны.

Задачи

1. На окружности даны точки A, B, C, X и Y . Прямые AX и BY пересекаются в точке C_1 , а прямые AY и BX — в точке C_2 . Аналогично определяются точки B_1, B_2 и A_1, A_2 . Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке.
2. Дан треугольник ABC . Точки A_1, B_1 и C_1 на прямых BC, CA и AB соответственно таковы, что B_1 и C_1 лежат на поляре точки A_1 относительно (ABC) . Докажите, что C_1 лежит на поляре точки B_1 относительно (ABC) .
3. (а) Докажите, что во вписанной-описанном четырёхугольнике точка пересечения диагоналей лежит на прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей.
(б) Докажите, что все четырёхугольники, одновременно вписанные в окружность Ω и описанные вокруг окружности ω , имеют общую точку пересечения диагоналей.
4. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно, точка I — её центр. Докажите, что медиана, проведённая из вершины A , отрезок B_1C_1 и прямая IA_1 пересекаются в одной точке.

5. Диагональ AC описанного четырёхугольника $ABCD$ пересекает его вписанную окружность в точках X и Y , точка M — середина XY . Докажите, что $\angle BMC = \angle DMC$.
6. Дан треугольник ABC . Докажите, что существует точка X такая, что для любой окружности ω , проходящей через A и X , полярная точка C относительно ω проходит через точку B .
7. Через центр вписанной окружности I треугольника ABC провели прямые ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c , перпендикулярные биссектрисам AI, BI, CI соответственно.
 - (а) Докажите, что точки пересечения этих прямых со сторонами BC, AC, AB соответственно лежат на одной прямой.
 - (б) Некоторая касательная к вписанной окружности пересекает эти прямые в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.
8. (а) В треугольник ABC вписана окружность ω с центром I . Докажите, что полярная ортоцентра треугольника IBC относительно ω проходит через середины сторон AB и AC .
 - (б) В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность с центром в точке I . Докажите, что ортоцентры треугольников AIB, BIC, CID, DIA лежат на одной прямой, проходящей через точку пересечения диагоналей $ABCD$.
9. Вписанная окружность ω треугольника ABC с центром в точке I касается BC в точке D . Точки I_b и I_c — центры внеписанных окружностей треугольника ABC со стороны вершин B и C соответственно. Прямые DI_b и DI_c пересекают ω в точках X и Y соответственно. Докажите, что прямые BX, CY и AD пересекаются в одной точке.
10. Четырёхугольник вписан в окружность ω . Продолжения противоположных сторон пересекаются в точках P и Q , а диагонали — в точке T . Точка M — середина PQ . Отрезок MT пересекает ω в точке X . Докажите, что окружность (PXQ) касается ω .