Летние сборы, июнь 2025, 9 класс. Ключевые теория и задачи

Ниже представлены теория и задачи со сборов, которые мы считаем самыми важными. Тем, кто не был на сборах, рекомендуется самостоятельно изучить их для полноценной дальнейшей работы на кружке. Полные материалы сборов выложены на странице кружка.

Теория

Алгебра

1. Симметрические многочлены. Элементарные симметрические многочлены. Основная теорема о симметрических многочленах.
2. Дискриминант многочлена от трёх переменных, его выражение через элементарные симметрические многочлены (коэффициенты многочлена). Леммы о p, q, r. pqr-метод.
3. Неравенство Мюрхеда. Неравенство Шура. Неравенство Мюрхеда для наборов с рациональными числами.

Геометрия

1. Двойное отношение четвёрки точек, четвёрки прямых, четвёрки точек на окружности. Сохранение двойных отношении при центральной проекции. Примеры гармонических четвёрок. Гармонический четырёхугольник. Сохранение двойных отношений при инверсии.
2. Поляра, её свойства. Полярное соответствие.

Комбинаторика

1. Определение выпуклого множества. Шесть эквивалентных определений выпуклого многоугольника (без доказательства эквивалентности). Определение выпуклой оболочки для произвольной системы точек. Существование и единственность выпуклой оболочки для произвольного множества точек на плоскости. Выпуклая оболочка конечной системы точек на плоскости.
2. Теорема Радона для плоскости. Теорема Хелли для плоскости. Теорема Юнга.
3. Частично упорядоченные множества (ЧУМы). Определение цепи и антицепи в ЧУМе. Теорема Мирского. Теорема Дилоурса.

Задачи

Алгебра

1. Дан многочлен $P_n(x)$ степени n с рациональными коэффициентами. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — его корни (возможно, комплексные). Также дан симметрический многочлен $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с рациональными коэффициентами. Докажите, что число $Q(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ рационально.

2. **(а)** Иван Александрович загадал три числа, после чего сообщил Антону Игоревичу их сумму, сумму квадратов и сумму кубов. Сможет ли Антон Игоревич восстановить исходные числа?
(б) А Юрию Алексеевичу Иван Александрович сообщил сумму чисел, сумму квадратов и сумму четвёртых степеней. Сможет ли Юрий Алексеевич восстановить исходные числа?
(в) А если Иван Александрович загадает n чисел и сообщит их сумму, сумму их квадратов, сумму кубов, $\ldots$, сумму n-ых степеней?

3. Известно, что $a, b, c \geqslant 0$ и $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$a^2b + b^2c + c^2a \leqslant 4.$$

Подсказка: Воспользуйтесь симметрическим преобразованием

4. Для неотрицательных чисел a, b, c докажите с помощью pqr-метода неравенство

$$a^3(a-b)(a-c) + b^3(b-a)(b-c) + c^3(c-a)(c-b) \geqslant 0.$$

5. Докажите, что для наборов $(a), (b), (c)$ таких, что $c_i = \dfrac{a_i + b_i}{2}$ верно, что $\dfrac{T_{(a)} + T_{(b)}}{2} \geqslant T_{(c)}$.

6. Докажите, что для любых $a, b, c > 0$ таких, что $abc = 1$, верно, что

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+a)(1+c)} + \frac{c^3}{(1+b)(1+a)} \geqslant \frac{3}{4}.$$

Геометрия

1. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке R, продолжения сторон AB и CD — в точке P, а продолжения сторон BC и AD — в точке Q. Обозначим через T проекцию точки R на прямую PQ. Докажите, что противоположные стороны четырёхугольника видны из точки T под равными углами.

2. **Теорема о бабочке.** Хорды AC и BD окружности ω проходят через середину хорды MN. Отрезки AD и BC пересекают отрезок MN в точках X и Y. Докажите, что $XM = YN$.

3. Окружности ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 касаются друг друга внешним образом по циклу. Окружность ω касается их всех внешним образом в точках X_1, X_2, X_3, X_4 соответственно. Докажите, что $X_1X_2X_3X_4$ образуют гармонический четырёхугольник.

4. Четырёхугольник вписан в окружность с центром O. Обозначим точки пересечения противоположных сторон и точку пересечения диагоналей четырехугольника через P, Q и R. Докажите, что O — ортоцентр треугольника PQR.

5. Докажите, что в описанном четырёхугольнике точка пересечения диагоналей совпадает с точкой пересечения диагоналей четырёхугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами.
Эту задачу нужно решать через поляры.

6. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно, точка I — её центр. Докажите, что медиана, проведённая из вершины A, отрезок B_1C_1 и прямая IA_1 пересекаются в одной точке.
Эту задачу нужно решать через двойные отношения и поляры.

Комбинаторика

1. Даны n точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Через каждую пару точек проведена прямая. Какое минимальное число попарно непараллельных прямых может быть среди них?

2. **Теорема Минковского для плоскости.** Начало координат является центром симметрии выпуклой фигуры площадью более 4. Докажите, что эта фигура содержит хотя бы одну точку с целыми координатами, отличную от начала координат.

3. Докажите, что в любом выпуклом семиугольнике найдётся точка, не принадлежащая ни одному из четырёхугольников, образованных четвёрками его последовательных вершин.

4. Дано несколько вертикальных отрезков. Для любых трёх из них найдётся прямая, их пересекающая. Докажите, что найдётся прямая, пересекающая все эти отрезки.