# Городские кружки ЦПМ
# Летние сборы, июнь 2025, 9 класс
# Материалы занятий

## Содержание


**I Группа 9–1** — **3**

**1 Алгебра** — **4**

Симметрические многочлены — 5
Симметрические многочлены от трёх переменных — 7
$pqr$-метод — 8
Неравенство Мюрхеда — 9

**2 Геометрия** — **11**

Двойные отношения — 12
Двойные отношения на окружности — 14
Двойные отношения. Добавка — 16
Поляры — 17
Поляры. Добавка — 19
Заключительный разнобой — 20

**3 Комбинаторика** — **21**

Выпуклость — 22
Теорема Хелли на прямой — 24
Теорема Хелли на плоскости — 26
ЧУМы, цепи и антицепи — 27
Теорема Дилуорса — 29

**II Группа 9–2** — **30**

**1 Алгебра** — **31**

Симметрические многочлены — 32
Симметрические многочлены от трёх переменных — 34
$pqr$-метод — 35

**2 Геометрия** — **38**

Двойные отношения — 39
Двойные отношения на окружности — 41
Двойные отношения. Добавка — 43
Поляры — 44
Поляры. Добавка — 46

Заключительный разнобой . . . 47

3 **Комбинаторика** **48**
Выпуклость . . . 49
Теорема Хелли на плоскости . . . 51
ЧУМы, цепи и антицепи . . . 52
Теорема Дилуорса . . . 53

**III Группа 9–3** **54**

1 **Алгебра** **55**
Симметрические многочлены . . . 56
Симметрические многочлены от трёх переменных . . . 58
$pqr$-метод . . . 59
Неравенство Мюрхеда . . . 60

2 **Геометрия** **62**
Двойные отношения . . . 63
Двойные отношения. Добавка . . . 65
Двойные отношения на окружности . . . 66
Поляры . . . 68
Заключительный разнобой . . . 70

3 **Комбинаторика** **71**
Выпуклость . . . 72
Теорема Хелли на плоскости . . . 74
ЧУМы, цепи и антицепи . . . 75
Теорема Дилуорса . . . 76

# Часть I

# Группа 9–1

# 1 Алгебра

# Симметрические многочлены

**Определение.** Многочлен $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от $n$ переменных называется *симметрическим*, если для любой перестановки $\sigma \in S_n$ выполняется

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

**Определение.** *Элементарными симметрическими многочленами* называются многочлены $\sigma_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\sigma_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \cdots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}.$$

**1.** Выразите через элементарные симметрические многочлены
**(а)** $a^3 + b^3 + c^3$,
**(б)** $a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$,
**(в)** $(ab)^3 + (bc)^3 + (ca)^3$.

**Основная теорема о симметрических многочленах.** Любой симметрический многочлен можно единственным образом представить, как многочлен от элементарных симметрических многочленов.

**Определение.** Говорят, что упорядоченный набор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ лексикографически больше набора $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, если существует такой индекс $i$, для которого верно $\alpha_i > \beta_i$ и $\alpha_j = \beta_j$, для $j < i$.

Таким образом мы можем упорядочить множество строк длины $n$. Такой порядок называется *лексикографическим.*

**2.** Пусть дан симметрический многочлен от $n$ переменных $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Рассмотрим все его мономы. Назовем моном $ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ старшим, если упорядоченный набор показателей $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ лексикографически больше упорядоченных наборов показателей остальных мономов относительно лексикографического порядка.
**(а)** Докажите, что старший моном произведения двух многочленов равен произведению старших мономов сомножителей.
**(б)** Докажите, что для любого монома $q = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$; $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n$ существуют такие неотрицательные числа $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$, что старший моном многочлена $\sigma_1^{\beta_1} \sigma_2^{\beta_2} \ldots \sigma_n^{\beta_n}$ совпадает с $q$, причем числа определены однозначно.
**(в)** Докажите основную теорему о симметрических многочленах.

**3.** Дан многочлен $P_n(x)$ степени $n$ с рациональными коэффициентами. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — его корни (возможно, комплексные). Также дан симметрический многочлен $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с рациональными коэффициентами. Докажите, что число $Q(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ рационально.

**4.** Многочлен $x^{1000}+y^{1000}$ выразили через элементарные симметрические, как $P(x+y,xy)$. Найдите сумму коэффициентов многочлена $P$.

**5.** Многочлен $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ от $n$ переменных называется *кососимметрическим*, если он меняет знак при транспозиции любых двух переменных. Рассмотрим выражение $\Delta(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\prod\limits_{i<j}(x_i-x_j)$. Докажите, что $P$ представим в виде

$$P(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\Delta(x_1,x_2,\ldots,x_n)\cdot Q(x_1,x_2,\ldots,x_n),$$

где $Q$ — симметрический многочлен.

**6.** **(а)** Иван Александрович загадал три числа, после чего сообщил Антону Игоревичу их сумму, сумму квадратов и сумму кубов. Сможет ли Антон Игоревич восстановить исходные числа?
**(б)** А Юрию Алексеевичу Иван Александрович сообщил сумму чисел, сумму квадратов и сумму четвёртых степеней. Сможет ли Юрий Алексеевич восстановить исходные числа?
**(в)** А если Иван Александрович загадает $n$ чисел и сообщит их сумму, сумму их квадратов, сумму кубов, $\ldots$, сумму $n$-ых степеней?

**7.** В таблицу $3\times 3$ записано девять чисел. Известно, что шесть чисел — суммы строк и суммы столбцов таблицы — равны между собой. Докажите, что сумма произведений строк таблицы равна сумме произведений её столбцов.

**8.** Докажите, что произведение всех чисел вида

$$\pm\sqrt{1}\pm\sqrt{2}\pm\ldots\pm\sqrt{2025}$$

является целым числом.

# Симметрические многочлены от трёх переменных

Рассмотрим многочлен $P(x) = x^3 - px^2 + qx - r$. Пусть числа $a, b, c$ корни уравнения $P(x) = 0$ (возможно, комплексные и не обязательно различные). Тогда $p, q, r$ представляют собой элементарные симметрические многочлены от переменных $a, b, c$: $p = \sigma_1(a, b, c)$, $q = \sigma_2(a, b, c)$, $r = \sigma_3(a, b, c)$.

**Определение.** *Дискриминантом* многочлена $P(x)$ называется выражение

$$D = (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2.$$

1. **(а)** Разложите дискриминант на элементарные симметрические многочлены (в терминах $p, q, r$).
**(б)** Найдите необходимое и достаточное условие на тройку чисел $(p, q, r)$, для которого числа $a, b, c$ вещественные.
**(в)** Найдите необходимое и достаточное условие на тройку чисел $(p, q, r)$, для которого числа $a, b, c$ вещественные и неотрицательные. Тройку чисел $(p, q, r)$ удовлетворяющую данному условию мы будем называть *допустимой*.

2. **(а) Лемма о r.** Пусть для заданных $p = p_0$ и $q = q_0$ существует хотя бы одно такое $r$, что тройка $(p_0, q_0, r)$ допустима. Докажите, что

   - для минимального $r$ такого, что тройка $(p_0, q_0, r)$ допустима, в соответствующей тройке $a, b, c$ либо есть два равных числа, либо одно из чисел равно 0;
   - для максимального $r$ такого, что тройка $(p_0, q_0, r)$ допустима, в соответствующей тройке $a, b, c$ есть два равных числа.

   **(б) Лемма о q.** Пусть для заданных $p = p_0$ и $r = r_0$ существует хотя бы одно такое $q$, что тройка $(p_0, q, r_0)$ допустима. Докажите, что для минимального и максимального $q$ такого, что тройка $(p_0, q, r_0)$ допустима, в соответствующей тройке $a, b, c$ есть два равных числа.
**(в) Лемма о p.** Пусть для заданных $r = r_0 > 0$ и $q = q_0$ существует хотя бы одно такое $p$, что тройка $(p, q_0, r_0)$ допустима. Докажите, что для минимального и максимального $p$ такого, что тройка $(p, q_0, r_0)$ допустима, в соответствующей тройке $a, b, c$ есть два равных числа. Что произойдёт с утверждением, если $r_0 = 0$?

3. **(а)** Какие необходимые и достаточные условия на тройку чисел $(p, q, r)$ надо наложить, чтобы числа $a, b, c$ были вещественными и большими или равными единице?
**(б)** А чтобы чтобы числа $a, b, c$ являлись сторонами некоторого треугольника (возможно, вырожденного)?

# $pqr$-метод

**1.** Известно, что $a, b, c > 0$ и $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Докажите, что

$$(a-1)(b-1)(c-1) \geqslant 8.$$

**2.** Для неотрицательных чисел $a, b, c$ верно, что $a + b + c = 1$. Докажите, что

$$1 + 12abc \geqslant 4(ab + bc + ac).$$

**3.** Для неотрицательных чисел $a, b, c$ докажите

$$a^3(a-b)(a-c) + b^3(b-a)(b-c) + c^3(c-a)(c-b) \geqslant 0.$$

**4.** Известно, что $a, b, c \geqslant 1$ и $a + b + c = 9$. Докажите, что

$$\sqrt{ab + ac + bc} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

**5.** Неотрицательные числа $a, b, c$ таковы, что никакие два из них не равны 0 одновременно. Докажите неравенство

$$(ab + bc + ac)\left(\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(a+c)^2} + \frac{1}{(c+b)^2}\right) \geqslant \frac{9}{4}.$$

**6.** Известно, что $a, b, c \geqslant 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Докажите неравенство

$$ab + bc + ac - abc \leqslant 2.$$

**Симметрическое преобразование.** Дана циклически симметричная функция $f(a, b, c)$. Введём функции $g(a, b, c) = f(a, b, c)f(a, c, b)$ и $h(a, b, c) = f(a, b, c) + f(a, c, b)$. Тогда (почему?) следующие системы неравенств эквивалентны:

$$\begin{cases} f(a, b, c) \geqslant 0 \\ f(a, c, b) \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} g(a, b, c) \geqslant 0 \\ h(a, b, c) \geqslant 0. \end{cases}$$

**7.** Известно, что $a, b, c \geqslant 0$ и $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$a^2b + b^2c + c^2a \leqslant 4.$$

# Неравенство Мюрхеда

Пусть даны переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Однородным симметрическим многочленом*, порождённым упорядоченным набором целых неотрицательных чисел $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$, называют выражение

$$T_{a_1,a_2,\ldots,a_n} = \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)}^{a_1} x_{\sigma(2)}^{a_2} \ldots x_{\sigma(n)}^{a_n},$$

где суммирование ведётся по множеству $S_n$ всех перестановок множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Пусть даны два упорядоченных набора целых неотрицательных чисел $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$. Тогда набор $(a)$ *мажорирует* набор $(b)$, если выполнены следующие условия:

$$a_1 \geqslant b_1, \quad a_1 + a_2 \geqslant b_1 + b_2, \quad \ldots, \quad a_1 + \ldots + a_{n-1} \geqslant b_1 + \ldots + b_{n-1},$$

$$a_1 + \ldots + a_n = b_1 + \ldots + b_n.$$

Если набор $(a)$ мажорирует набор $(b)$, то для неотрицательных значений переменных верно *неравенство Мюрхеда*:

$$T_{a_1,a_2,\ldots,a_n} \geqslant T_{b_1,b_2,\ldots,b_n}.$$

**1.** *(Неравенство Шура)* Докажите, что для любого натурального $n$ и любых неотрицательных значений переменных верно, что

$$T_{n+2,0,0} + T_{n,1,1} \geqslant 2T_{n+1,1,0}.$$

**2.** **(а)** Докажите неравенство Мюрхеда.
**(б)** Докажите, что неравенство Мюрхеда остается верным, если в условии на наборы поменять целые числа на рациональные.

**3.** Докажите, что для любых $a, b, c > 0$ таких, что $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, верно, что

$$a^2bc + b^2ac + c^2ab \leqslant \frac{1}{3}.$$

**4.** Докажите, что для любых $a, b, c > 0$ таких, что $abc = 1$, верно, что

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+a)(1+c)} + \frac{c^3}{(1+b)(1+a)} \geqslant \frac{3}{4}.$$

**5.** Докажите, что для любых $a \geqslant b \geqslant c > 0$ верно, что

$$a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 \geqslant a^3bc + b^3ac + c^3ab.$$

**6.** **(а)** Докажите, что для наборов $(a), (b), (c)$ таких, что $c_i = \dfrac{a_i + b_i}{2}$ верно, что

$$\frac{T_{(a)} + T_{(b)}}{2} \geqslant T_{(c)}.$$

**(б)** Докажите, что для любых $a, b, c > 0$ таких, что $abc \geqslant 1$, верно, что

$$\frac{a^5 - a^2}{a^5 + b^2 + c^2} + \frac{b^5 - b^2}{b^5 + a^2 + c^2} + \frac{c^5 - c^2}{c^5 + a^2 + b^2} \geqslant 0.$$

**7.** Докажите, что для любых положительных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и натурального $k$, верно, что

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + x_i}\right) \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{k+1}}{1 + x_i}\right) \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^k\right).$$

**8.** Докажите, что для любых $a, b, c > 0$ верно, что

$$\frac{a}{a + \sqrt{(a+2b)(a+2c)}} + \frac{b}{b + \sqrt{(b+2a)(b+2c)}} + \frac{c}{c + \sqrt{(c+2b)(c+2a)}} \leqslant \frac{3}{4}.$$

# 2 Геометрия

# Двойные отношения

*Двойным отношением* четвёрки точек $A$, $B$, $C$, $D$, лежащих на одной прямой, называется число

$$(A,B;C,D)=\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}:\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}.$$

А именно, это отношение отношений, в которых точки $C$ и $D$ делят отрезок $AB$.

*Двойным отношением прямых* $a$, $b$, $c$, $d$, пересекающихся в одной точке, называется число

$$(a,b;c,d)=\frac{\sin\angle(\vec{a},\vec{c})}{\sin\angle(\vec{b},\vec{c})}:\frac{\sin\angle(\vec{a},\vec{d})}{\sin\angle(\vec{b},\vec{d})},$$

где $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ — произвольные векторы, направленные вдоль соответствующих прямых, $\angle(\vec{a},\vec{b})$ — ориентированный угол (с точностью до $2\pi$).

**Утверждение.** Прямые $a$, $b$, $c$, $d$ пересекаются в одной точке, прямая $\ell$ пересекает их в различных точках $A$, $B$, $C$, $D$ соответственно. Тогда $(a,b;c,d)=(A,B;C,D)$.

Четвёрка точек или прямых называется *гармонической*, если их двойное отношение равно $-1$. Примеры:

- $A$, $B$, $M$, $\infty$, где $M$ — середина отрезка $AB$;
- $B$, $C$, $A_1$, $A_2$, где $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ — чевианы, пересекающиеся в одной точке, $A_2$ — точка пересечения прямых $B_1C_1$ и $BC$.

**Утверждение.** Про точки $A$, $B$, $C$, $D$, $D_1$, лежащие на одной прямой, известно, что $(A,B;C,D)=(A,B;C,D_1)$. Тогда $D=D_1$.

**1.** Известно, что $(A,B;C,D)=\lambda$. Найдите $(B,A;C,D)$, $(A,B;D,C)$ и $(A,C;B,D)$. Осознайте, что с помощью этого можно найти двойное отношение для любой перестановки точек.

**2.** Докажите, что следующие четвёрки гармонические:
**(а)** $a$, $b$, $c$, $d$, где прямые $c$ и $d$ — внутренняя и внешняя биссектрисы угла между прямыми $a$ и $b$;
**(б)** такие точки $A$, $B$, $C$, $D$, что для середины $M$ отрезка $AB$ выполнено равенство $MA^2=\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}$.

**3.** Прямые $a$, $b$, $c$, $d$ пересекаются в одной точке. Докажите, что если $c\perp d$ и $(a,b;c,d)=-1$, то $c$ и $d$ — биссектрисы углов, образованных прямыми $a$ и $b$.

**4.** Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке $R$, продолжения сторон $AB$ и $CD$ — в точке $P$, а продолжения сторон $BC$ и $AD$ — в точке $Q$.
**(а)** Прямая, проходящая через точку $R$, пересекает прямые $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ в точках $M$, $X$, $N$, $Y$. Докажите, что $R$ делит пополам отрезок $MN$ тогда и

только тогда, когда $R$ делит пополам отрезок $XY$.

**(б)** Обозначим через $T$ проекцию точки $R$ на прямую $PQ$. Докажите, что противоположные стороны четырёхугольника видны из точки $T$ под равными углами.

**5.** В треугольнике $ABC$ проведена биссектриса $AL$ и биссектриса внешнего угла $AN$. Точка $M$ — середина стороны $AC$, $P$ — точка пересечения прямых $AB$ и $ML$. Докажите, что $PA = PN$.

**6.** Пусть $H_a$ и $L_a$ — основание высоты и биссектрисы треугольника $ABC$, проведённых из вершины $A$; вписанная и вневписанная окружности касаются стороны $BC$ в точках $K_a$ и $T_a$ соответственно.

**(а)** Докажите, что $(H_a, L_a; K_a, T_a) = -1$;

**(б)** Пусть $I$ и $I_a$ — центр вписанной и вневписаной окружностей треугольника $ABC$. Докажите, что прямые $H_aI$ и $H_aI_a$ симметричны относительно прямой $BC$.

**(в)** Определим аналогично точки $H_b$, $L_b$, $K_b$, $T_b$. Докажите, что прямые $H_aH_b$, $L_aL_b$, $T_aT_b$, $K_aK_b$ пересекаются в одной точке.

**7.** Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Точки $Q$, $A$, $B$, $P$ лежат на одной прямой именно в таком порядке. Прямая $AC$ касается окружности $(ADQ)$, а прямая $BD$ касается окружности $(BCP)$. Точки $M$ и $N$ — середины сторон $BC$ и $AD$ соответственно. Докажите, что следующие касательная к $(ANQ)$ в точке $A$, касательная к $(BMP)$ в точке $B$ пересекаются на прямой $CD$.

**8.** На стороне $BC$ треугольника $ABC$ выбрана точка $D$. Окружности, вписанные в треугольники $ABD$ и $ACD$ касаются отрезка $BC$ в точках $E$ и $F$ соответственно. Линия центров окружностей пересекает отрезок $AD$ в точке $P$. Прямые $BP$ и $CP$ пересекают биссектрисы углов $C$ и $B$ в точках $Y$ и $X$ соответственно. Докажите, что прямые $EX$ и $FY$ пересекаются на вписанной окружности треугольника $ABC$.

# Двойные отношения на окружности

**Определение.** *Двойным отношением* $(A, B; C, D)$ различных точек $A$, $B$, $C$, $D$, лежащих на одной окружности, называют величину $(PA, PB; PC, PD)$, где $P$ — произвольная точка той же окружности.

Эта величина не зависит от выбора точки $P$. Точка $P$ может совпадать с одной из точек $A$, $B$, $C$, $D$, тогда соответствующая секущая вырождается в касательную к окружности.

**Утверждение.** При инверсии сохраняется двойное отношение четырёх точек, лежащих на обобщённой окружности.

Из этого следует, что двойное отношение сохраняется при проекции с окружности на себя: если через точку $P$ проведены четыре секущие, пересекающие окружность в точках $A$ и $A_1$, $B$ и $B_1$, $C$ и $C_1$, $D$ и $D_1$, то $(A, B; C, D) = (A_1, B_1; C_1, D_1)$ (но оно не обязательно равно двойному отношению прямых $PA$, $PB$, $PC$, $PD$).

**1.** **(а)** Докажите, что для гармонического четырёхугольника $ABCD$ выполнено равенство $(A, C; B, D) = -1$.
**(б)** Из точки $P$ провели касательные $PX$ и $PY$ к окружности $\omega$ и секущую, которая пересекла $\omega$ в точках $A$ и $B$, а прямую $XY$ — в точке $C$. Докажите, что $(A, B; C, P) = -1$.

**2.** Биссектриса внутреннего угла при вершине $A$ треугольника $ABC$ пересекает $(ABC)$ в точке $D$, а биссектриса внешнего угла пересекает $BC$ в точке $E$. Симедиана, поведённая из вершины $A$, пересекает $(ABC)$ в точке $L$. Докажите, что $D$, $E$, $L$ лежат на одной прямой.

**3.** Дан треугольник $ABC$ и точка $M$. Прямая, проходящая через $M$, пересекает $AB$, $BC$, $CA$ в $C_1$, $A_1$, $B_1$ соответственно. Прямые $AM$, $BM$, $CM$ пересекают окружность $(ABC)$ в точках $A_2$, $B_2$, $C_2$ соответственно. Докажите, что $A_1A_2$, $B_1B_2$, $C_1C_2$ пересекаются в одной точке, лежащей на $(ABC)$.

**4.** **(а) Теорема о бабочке.** Хорды $AC$ и $BD$ окружности $\omega$ проходят через середину хорды $MN$. Отрезки $AD$ и $BC$ пересекают отрезок $MN$ в точках $X$ и $Y$. Докажите, что $XM = YN$.
**(б) Теорема о двойной бабочке.** На хорде $MN$ окружности $\omega$ отмечены точки $M_1$ и $N_1$ такие, что $MM_1 = NN_1$. Хорда $AC$ проходит через точку $M_1$, а хорда $BD$ — через точку $N_1$. Отрезки $AD$ и $BC$ пересекают $MN$ в точках $X$ и $Y$ соответственно. Докажите, что $XM = YN$.

**5.** Окружности $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, $\omega_4$ касаются друг друга внешним образом по циклу. Окружность $\omega$ касается их всех внешним образом в точках $X_1$, $X_2$, $X_3$, $X_4$ соответственно. Докажите, что $X_1X_2X_3X_4$ образуют гармонический четырехугольник.

**6.** Из точки $P$ вне окружности $\omega$ проведены касательные $PX$ и $PY$ и две секущие, пересекающие окружность в точках $A$ и $B$, $C$ и $D$. Докажите, что точки пересечения прямых $AC$ и $BD$, $AD$ и $BC$ лежат на прямой $XY$.

**7.** Окружность проходит через вершины $B$ и $C$ треугольника $ABC$ и повторно пересекает отрезки $AB$ и $AC$ в точках $C_1$ и $B_1$ соответственно. Отрезки $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в точке $P$, прямая $AP$ пересекает отрезок $BC$ в точке $A_1$. Докажите, что окружность $(A_1B_1C_1)$ проходит через середину отрезка $BC$.

**8.** Биссектрисы углов $B$ и $C$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $I$ и пересекают окружность $(ABC)$ в точках $B_1$ и $C_1$ соответственно. Точка $D$ — середина дуги $BAC$. Окружности $\omega_b$ и $\omega_c$ касаются прямых $AB$ и $AC$ соответственно и окружности $(ABC)$ внутренним образом в точках $B_1$ и $C_1$ соответственно. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения $\omega_b$ и $\omega_c$, пересекается с прямой $DI$ на $(ABC)$.

# Двойные отношения. Добавка

**1.** Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности, лучи $BA$ и $CD$ пересекаются в точке $E$, лучи $BC$ и $AD$ — в точке $F$. Вписанная окружность треугольника, образованного прямыми $AB$, $CD$ и биссектрисой угла $B$, касается прямой $AB$ в точке $K$, а вписанная окружность треугольника, образованного прямыми $AD$, $BC$ и биссектрисой угла $B$, касается прямой $BC$ в точке $L$. Докажите, что прямые $KL$, $AC$ и $EF$ пересекаются в одной точке.

**2.** Внутри треугольника $ABC$ на биссектрисе угла $A$ выбрана произвольная точка $J$. Лучи $BJ$ и $CJ$ пересекают стороны $AC$ и $AB$ в точках $K$ и $L$ соответственно. Касательная к окружности $(AKL)$ в точке $A$ пересекает прямую $BC$ в точке $P$. Докажите, что $PA = PJ$.

**3.** Обозначим за $\omega$ и $\omega_a$ вписанную окружность треугольника $ABC$ и его вневписанную окружность напротив вершины $A$. Точка $P \in \omega$ такова, что $(BPC)$ касается $\omega$, а точка $Q \in \omega_a$ такова, что $(BQC)$ касается $\omega_a$. Лучи $AP$ и $AQ$ пересекают $BC$ в $X$ и $Y$. Докажите, что $BX = CY$.

# Поляры

**Определение.** Дана окружность $\omega$ с центром $O$ и точка $P$. *Полярой* точки $P$ относительно $\omega$ называется прямая $\ell$, которая проходит через инверсную точку $P'$ перпендикулярно прямой $OP$. Точка $P$ называется *полюсом* прямой $\ell$.

Полюсом бесконечно удалённой прямой будем считать центр окружности. Полюсом прямой $\ell$, проходящей через центр $\omega$ будем считать бесконечно удалённую точку, соответствующему перпендикулярному $\ell$ направлению.

Таким образом, мы задали биекцию между точками и прямыми на проективной плоскости. Замена точек на соответствующие им прямые и наоборот называется *полярным преобразованием.*

- Если точка $P$ лежит вне $\omega$, то её поляра — это прямая $XY$, где $PX$ и $PY$ — касательные к $\omega$.
- Пусть через точки $P$ проведены две секущие, пересекающие окружность в точках $A$ и $B$, $C$ и $D$. Тогда точки пересечения прямых $AC$ и $BD$, $AD$ и $BC$ лежат на поляре точки $P$ относительно $\omega$.
- Через точку $P$ проведена секущая, пересекающая окружность $\omega$ в точках $A$ и $B$, а её поляру — в точке $C$. Тогда $(A, B; C, P) = -1$.
- Если $A$ лежит на поляре $B$, то $B$ лежит на поляре $A$.

**1.** Четырёхугольник вписан в окружность с центром $O$. Обозначим точки пересечения противоположных сторон и точку пересечения диагоналей четырехугольника через $P$, $Q$ и $R$. Докажите, что $O$ — ортоцентр треугольника $PQR$.

**2.** На окружности даны точки $A$, $B$, $C$, $X$ и $Y$. Прямые $AX$ и $BY$ пересекаются в точке $C_1$, а прямые $AY$ и $BX$ — в точке $C_2$. Аналогично определяются точки $B_1$, $B_2$ и $A_1$, $A_2$. Докажите, что прямые $A_1A_2$, $B_1B_2$ и $C_1C_2$ пересекаются в одной точке.

**3.** **(а)** Вписанная окружность описанного четырёхугольника $ABCD$ касается есть сторон $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ в точках $K$, $L$, $M$, $N$ соответственно. Прямые $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $P$, прямые $AD$ и $BC$ — в точке $Q$, прямые $KL$ и $MN$ — в точке $R$, прямые $KN$ и $LM$ — в точке $S$. Докажите, что $P$, $Q$, $R$, $S$ лежат на одной прямой.
**(б)** Докажите, что в описанном четырёхугольнике точка пересечения диагоналей совпадает с точкой пересечения диагоналей четырёхугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами.
**(в)** Докажите, что во вписанной-описанном четырёхугольнике точка пересечения диагоналей лежит на прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей.
**(г)** Докажите, что все четырёхугольники, одновременно вписанные в окружность $\Omega$ и описанные вокруг окружности $\omega$, имеют общую точку пересечения

диагоналей.

**4.** В треугольнике $ABC$ вписанная окружность $\omega$ касается сторон $AB$ и $AC$ в точках $C_1$ и $B_1$. Оказалось, что прямые $BC$, $B_1C_1$ и касательная к $(ABC)$ в точке $A$ пересекаются в одной точке $D$. Докажите, что $D$ лежит на прямой, соединяющей центры $\omega$ и $(ABC)$.

**5.** Вписанная в треугольник $ABC$ окружность касается сторон $BC$, $CA$, $AB$ в точках $A_1$, $B_1$, $C_1$ соответственно, точка $I$ — её центр. Докажите, что медиана, проведённая из вершины $A$, отрезок $B_1C_1$ и прямая $IA_1$ пересекаются в одной точке.

**6.** Дан треугольник $ABC$. Докажите, что существует точка $X$ такая, что для любой окружности $\omega$, проходящей через $A$ и $X$, поляра точки $C$ относительно $\omega$ проходит через точку $B$.

**7.** Через центр вписанной окружности $I$ треугольника $ABC$ провели прямые $\ell_a$, $\ell_b$, $\ell_c$, перпендикулярные биссектрисам $AI$, $BI$, $CI$ соответственно.
**(а)** Докажите, что точки пересечения этих прямых со сторонами $BC$, $AC$, $AB$ соответственно лежат на одной прямой.
**(б)** Некоторая касательная к вписанной окружности пересекает эти прямые в точках $A_1$, $B_1$, $C_1$ соответственно. Докажите, что прямые $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ пересекаются в одной точке.

# Поляры. Добавка

1. Четырёхугольник вписан в окружность $\omega$. Продолжения противоположных сторон пересекаются в точках $P$ и $Q$, а диагонали — в точке $T$. Точка $M$ — середина $PQ$. Отрезок $MT$ пересекает $\omega$ в точке $X$. Докажите, что окружность $(PXQ)$ касается $\omega$.

2. В треугольнике $ABC$ биссектрисы $AA_1$ и $CC_1$ пересекаются в точке $I$. Прямая, проходящая через точку $B$ параллельно $AC$ пересекает лучи $AA_1$ и $CC_1$ в точках $A_2$ и $C_2$ соответственно. Точка $O_a$ — центр описанной окружности треугольника $AC_1C_2$, точка $O_c$ — центр описанной окружности треугольника $CA_1A_2$. Докажите, что $\angle O_aBO_c = \angle AIC$.

3. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Обозначим через $L_a$ точку Лемуана треугольника $BCD$, аналогично определим точки $L_b$, $L_c$, $L_d$. Оказалось, что четырёхугольник $L_aL_bL_cL_d$ вписанный. Докажите, что у $ABCD$ есть две параллельные стороны.

# Заключительный разнобой

**1.** Точки $D$ и $E$ — проекции вершин $B$ и $C$ на биссектрису угла $A$ треугольника $ABC$. Окружность, построенная на $DE$ как на диаметре, пересекает сторону $BC$ в точках $X$ и $Y$. Докажите, что $\angle BAX = \angle CAY$.

**2.** **(а)** В треугольник $ABC$ вписана окружность $\omega$ с центром $I$. Докажите, что поляра ортоцентра треугольника $IBC$ относительно $\omega$ проходит через середины сторон $AB$ и $AC$.
**(б)** В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность с центром в точке $I$. Докажите, что ортоцентры треугольников $AIB$, $BIC$, $CID$, $DIA$ лежат на одной прямой, проходящей через точку пересечения диагоналей $ABCD$.

**3.** Диагональ $AC$ описанного четырёхугольника $ABCD$ пересекает его вписанную окружность в точках $X$ и $Y$, точка $M$ — середина $XY$. Докажите, что $\angle BMC = \angle DMC$.

**4.** Вписанная окружность $\omega$ треугольника $ABC$ с центром в точке $I$ касается $BC$ в точке $D$. Точки $I_b$ и $I_c$ — центры вневписанных окружностей треугольника $ABC$ со стороны вершин $B$ и $C$ соответственно. Прямые $DI_b$ и $DI_c$ пересекают $\omega$ в точках $X$ и $Y$ соответственно. Докажите, что прямые $BX$, $CY$ и $AD$ пересекаются в одной точке.

# 3 Комбинаторика

# Выпуклость

**Определение.** Множество точек называется выпуклым, если для любых двух точек, принадлежащих ему, верно, что весь отрезок, соединяющий эти 2 точки, принадлежит этому множеству.

**Утверждение.** Пересечение любого (в том числе и бесконечного!) множества выпуклых множеств является выпуклым множеством.

**Определение.** Выпуклым многоугольником называется многоугольник (т. е. замкнутая несамопересекающаяся ломаная), лежащий в одной полуплоскости относительно любой из прямых, содержащих его стороны.

**Теорема 1.** Многоугольник является выпуклым, если выполнено одно из следующих равносильных утверждений:

- часть плоскости, им ограниченная, является выпуклым множеством;
- он лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону;
- все его внутренние углы меньше $180^\circ$;
- все его диагонали лежат полностью внутри него;
- граница видна полностью из любой его внутренней точки;
- из любой внешней точки он виден под углом, меньшим $180^\circ$.

**Определение.** Выпуклой оболочкой множества точек $A$ называется наименьшее по включению (содержащееся в любом другом) выпуклое множество, содержащее все точки множества $A$.

**Теорема 2.** У множества точек на плоскости существует единственная выпуклая оболочка.

**1.** Докажите, что выпуклая оболочка конечного множества точек является многоугольником с вершинами в некоторых из этих точек.

**2.** На плоскости даны $2n + 3$ точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой, а никакие четыре не лежат на одной окружности. Докажите, что из этих точек можно выбрать три точки так, что $n$ из оставшихся точек лежат внутри окружности, проведённой через выбранные точки, а $n$ вне.

**3.** Даны $n$ точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Через каждую пару точек проведена прямая. Какое минимальное число попарно непараллельных прямых может быть среди них?

**4.** На плоскости дано конечное число точек. Докажите, что из них всегда можно выбрать точку, для которой ближайшими к ней являются не более трёх данных точек.

**5.** **Теорема Минковского для плоскости.** Начало координат является центром симметрии выпуклой фигуры площадью более 4. Докажите, что эта фигура содержит хотя бы одну точку с целыми координатами, отличную от начала координат.

**6.** **(а)** Во всех узлах целочисленной решётки, кроме одного, в котором находится охотник, растут деревья, стволы которых имеют радиус $r$. Докажите, что охотник не сможет увидеть зайца, находящегося от него на расстоянии больше $1/r$.

**(б)** Пусть $n$ — натуральное число. Во всех точках целочисленной решётки, расположенных строго внутри окружности радиуса $\sqrt{n^2+1}$ с центром в начале координат и отличных от начала координат, растут деревья радиуса $r$. Докажите, что если $r < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, то на указанной окружности есть точка, которую можно увидеть из начала координат.

**7.** Внутри выпуклого стоугольника выбрано $k$ точек, $2 \leqslant k \leqslant 50$. Докажите, что можно отметить $2k$ вершин стоугольника так, чтобы все выбранные точки оказались внутри $2k$-угольника с отмеченными вершинами.

**8.** Докажите, что выпуклый многоугольник может быть разрезан непересекающимися диагоналями на остроугольные треугольники не более чем одним способом.

# Теорема Хелли на прямой

1. **Теорема Хелли на прямой.** На прямой выбрано несколько отрезков так, что любые два из них имеют общую точку. Докажите, что все отрезки имеют общую точку.

2. **(а)** На плоскости расположено несколько прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. У любых двух прямоугольников есть общая точка. Докажите, что тогда у всех прямоугольников есть общая точка.
   **(б)** А если стороны не обязательно параллельны осям координат?

3. **(а)** На прямой дано $2n+1$ отрезков. Известно, что каждый пересекается не менее, чем с $n$ из оставшихся. Докажите, что найдется отрезок, который пересекается со всеми.
   **(б)** На плоскости расположено $[4n/3]$ прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Известно, что любой прямоугольник пересекается хотя бы с $n$ другими. Докажите, что есть прямоугольник, пересекающийся со всеми остальными прямоугольниками.

4. **(а)** Пусть на плоскости дано семейство единичных квадратов со сторонами, параллельными осям координат. Оказалось, что среди них нельзя найти $k+1$ попарно не пересекающихся. Докажите, что найдётся множество $X$ из $2k-1$ точек такое, что всякий квадрат данного семейства содержит хотя бы одну точку $X$.
   **(б)** Пусть на плоскости дано семейство квадратов со сторонами, параллельными осям координат. Оказалось, что среди них нельзя найти $k+1$ попарно не пересекающихся. Докажите, что найдётся множество $X$ из $4k-3$ точек такое, что всякий квадрат данного семейства содержит хотя бы одну точку $X$.

5. Докажите, что если в конечном семействе отрезков на прямой из любых $n+1$ отрезка какие-то два пересекаются, то найдётся множество $X$ из $n$ точек такое, что всякий отрезок данного семейства содержит хотя бы одну точку $X$.

6. На прямой дано семейство отрезков, покрашенных в $n+1$ цвет. Известно, что среди любых $n+1$ разноцветных отрезков найдутся два пересекающихся. Докажите, что для некоторого цвета найдётся множество $X$ из $n$ точек такое, что всякий отрезок данного цвета содержит хотя бы одну точку $X$.
   **(а)** $n=1$; **(б)** $n=2$; **(в)** любое $n$.

7. На плоскости дано семейство прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, покрашенных в два цвета. Известно, что любые два разноцветных прямоугольника пересекаются. Докажите, что либо все прямоугольники одного из цветов имеют общую точку, либо для каждого цвета есть прямая, пересекающая все прямоугольники этого цвета.

8. Пусть на плоскости дано семейство прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Оказалось, что любые два прямоугольника семей-

ства можно пересечь одновременно либо горизонтальной, либо вертикальной прямой. Докажите, что есть пара из горизонтальной и вертикальной прямой, таких что всякий прямоугольник семейства пересекает хотя бы одну из них.

# Теорема Хелли на плоскости

1. **(а)** На плоскости расположены $k \geqslant 4$ точки. Докажите, что их можно разбить на две группы так, чтобы выпуклые оболочки групп пересекались.
   **(б) Теорема Хелли.** На плоскости расположено конечное число выпуклых множеств, у любых трёх из которых есть общая точка. Докажите, что у всех множеств есть общая точка.
   **(в)** Докажите, что теорема Хелли неверна для бесконечного числа множеств.

2. Докажите, что в любом выпуклом семиугольнике найдётся точка, не принадлежащая ни одному из четырёхугольников, образованных четвёрками его последовательных вершин.

3. На окружности отметили несколько дуг длины меньше половины окружности. Известно, что любые три дуги имеют общую точку. Докажите, что все дуги имеют общую точку.

4. **Теорема Юнга.** На плоскости даны несколько точек, причём расстояние между любыми двумя не превосходит 1. Докажите, что все точки можно накрыть кругом радиуса $1/\sqrt{3}$.

5. **Теорема Бляшке.** Про выпуклый многоугольник $M$ известно, что для любой прямой длина отрезка, служащего проекцией многоугольника $M$ на эту прямую, не меньше 1. Докажите, что $M$ заключает внутри себя круг радиуса $1/3$.

6. Дано несколько вертикальных отрезков. Для любых трёх из них найдётся прямая, их пересекающая. Докажите, что найдётся прямая, пересекающая все эти отрезки.

7. Докажите, что в любом выпуклом многоугольнике найдется такая точка $O$, что для любых точек $A$ и $B$ на его границе таких, что $O$ лежит на отрезке $AB$, выполнено $AO \geqslant AB/3$.

8. **Теорема Красносельского.** Дан не обязательно выпуклый многоугольник $M$. Известно, что для любых трёх точек его границы можно указать точку внутри $M$, из которой видны эти точки. Докажите, что существует точка внутри $M$, из которой видны полностью все стороны $M$.

# ЧУМы, цепи и антицепи

В рамках этого листика *частично упорядоченным множеством* будем называть любой ориентированный граф (без петель и кратных стрелок) с конечным числом вершин, в котором выполнено свойство *транзитивности*: для любых трёх вершин $A$, $B$, $C$ если есть стрелки $A \to B$, $B \to C$, то есть стрелка $A \to C$.

*Цепь* — это последовательность $A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_n$ некоторых вершин графа, любые два соседних элемента которой соединены стрелкой. *Антицепь* — набор $\{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ вершин графа, никакие два из которых не соединены стрелкой.

**Теорема Мирского.** В частично упорядоченном множестве число вершин в самой большой цепи равно минимальному количеству антицепей, на которые оно разбивается.

**Теорема Дилуорса.** В частично упорядоченном множестве число вершин в самой большой антицепи равно минимальному количеству цепей, на которые оно разбивается.

**1.** В ящике с пакетами лежит 100 пакетов. Известно, что нет цепочки из 11 последовательно вложенных друг в друга пакетов. Докажите, что все пакеты можно раскрасить в 10 цветов так, чтобы никакие два пакета одного цвета не лежали один внутри другого.

**2.** **(а)** Докажите теорему Мирского.
**(б)** В частичном упорядоченном множестве в самой длинной цепи $n$ вершин, а самой большой антицепи — $m$ вершин. Докажите, что в этом ЧУМе всего не более $nm$ вершин.

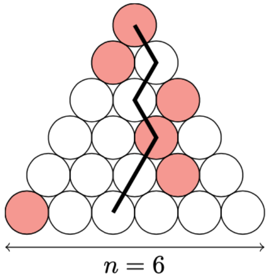
**3.** Есть набор из 2025 неравных клетчатых прямоугольников, стороны которых не превосходят 1000 клеток. Докажите, что можно найти пять прямоугольников, которые можно по цепочке засунуть друг в друга.

**4.** Для данных натуральных $r$ и $s$ докажите, что любая последовательность различных вещественных чисел длины $rs+1$ содержит монотонно возрастающую подпоследовательность длины $r+1$ или монотонно убывающую длины $s+1$.

**5.** Какое наибольшее число шашек можно расставить в клетках таблицы $n \times n$ так, чтобы выполнялось условие: если шашка $A$ находится ниже и правее шашки $B$, то они находятся в соседних по диагонали клетках?

**6.** *Японский треугольник* состоит из $1 + 2 + \ldots + n$ одинаковых кругов, выложенных в форме равностороннего треугольника. В каждом горизонтальном ряду ровно один круг покрашен в красный цвет. *Путем ниндзя* в японском треугольнике называется последовательность из $n$ кругов, в которой каждый следующий круг примыкает к предыдущему снизу-слева или снизу-справа.

Найдите наибольшее число $k$ (зависящее от $n$) такое, что в любом японском треугольнике существует путь ниндзя, содержащий хотя бы $k$ красных кругов.



**7.** Вершины графа $G$ нельзя раскрасить правильным образом в 10 цветов, но можно в 11. Докажите, что для любой правильной раскраски вершин графа $G$ в 11 цветов в нём можно найти простой путь из 11 разноцветных вершин.

# Теорема Дилуорса

**Теорема Дилуорса.** В частично упорядоченном множестве число вершин в самой большой антицепи равно минимальному количеству цепей, на которые оно разбивается.

В этом листике доказываем теорему Дилуорса двумя способами: индукцией по числу вершин и через теорему Кёнига.

**1.** (*Доказательство по индукции*) Рассмотрим кукую-то вершину $u$ нашего частично упорядоченного множества $M$, в которую не входит ни одной стрелки. По предположению индукции если $m$ — размер максимальной антицепи в $M \setminus \{u\}$, то тогда $M \setminus \{u\}$ разбивается на $m$ непересекающихся цепей: $M \setminus \{u\} = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_m$. Назовём элемент $x \in M \setminus \{u\}$ *интересным*, если он лежит в какой-нибудь максимальной антицепи множества $M \setminus \{u\}$.
**(а)** Обозначим через $x_i$ наибольший (относительно частичного порядка) интересный элемент цепи $C_i$. Докажите, что $\{x_1, \ldots, x_m\}$ — антицепь.
**(б)** Попытайтесь добавить вершину $u$ к антицепи $\{x_1, \ldots, x_m\}$ и завершите доказательство.

**2.** (*Доказательство через теорему Кёнига о максимальном паросочетании*) Рассмотрим двудольный граф $G$: обе доли — это копии нашего частично упорядоченного множества $M$; если в множестве $M$ была стрелка $A \to B$, то в графе $G$ соединим вершину $A$ левой доли с вершиной $B$ правой доли ребром.
**(а)** Докажите, что размер минимального разбиения множества $M$ на цепи равен разности числа $|M|$ и размера максимального паросочетания в $G$.
**(б)** Докажите, что размер максимальной антицепи в множестве $M$ равен разности числа $|M|$ и размера минимального вершинного покрытия рёбер в $G$. Завершите доказательство.

## Часть II

# Группа 9–2

# 1 Алгебра

# Симметрические многочлены

**Определение.** Многочлен $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от $n$ переменных называется *симметрическим*, если для любой перестановки $\sigma \in S_n$ выполняется

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

**Определение.** *Элементарными симметрическими многочленами* называются многочлены $\sigma_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\sigma_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \cdots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}.$$

**1.** Выразите через элементарные симметрические многочлены
**(а)** $a^3 + b^3 + c^3$,
**(б)** $a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$,
**(в)** $(ab)^3 + (bc)^3 + (ca)^3$.

**Основная теорема о симметрических многочленах.** Любой симметрический многочлен можно единственным образом представить, как многочлен от элементарных симметрических многочленов.

**Определение.** Говорят, что упорядоченный набор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ лексикографически больше набора $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, если существует такой индекс $i$, для которого верно $\alpha_i > \beta_i$ и $\alpha_j = \beta_j$, для $j < i$.

Таким образом мы можем упорядочить множество строк длины $n$. Такой порядок называется *лексикографическим.*

**2.** Пусть дан симметрический многочлен от $n$ переменных $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Рассмотрим все его мономы. Назовем моном $ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ старшим, если упорядоченный набор показателей $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ лексикографически больше упорядоченных наборов показателей остальных мономов относительно лексикографического порядка.
**(а)** Докажите, что старший моном произведения двух многочленов равен произведению старших мономов сомножителей.
**(б)** Докажите, что для любого монома $q = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$; $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n$ существуют такие неотрицательные числа $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$, что старший моном многочлена $\sigma_1^{\beta_1} \sigma_2^{\beta_2} \ldots \sigma_n^{\beta_n}$ совпадает с $q$, причем числа определены однозначно.
**(в)** Докажите основную теорему о симметрических многочленах.

**3.** Дан многочлен $P(x)$ степени $n$ с рациональными коэффициентами. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — его корни (возможно, комплексные). Также дан симметрический многочлен $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с рациональными коэффициентами. Докажите, что число $Q(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ рационально.

**4.** Многочлен $x^{1000} + y^{1000}$ выразили через элементарные симметрические, как $P(x+y, xy)$. Найдите сумму коэффициентов многочлена $P$.

**5.** Многочлен $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от $n$ переменных называется *кососимметрическим*, если он меняет знак при транспозиции любых двух переменных. Рассмотрим выражение $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod\limits_{i<j}(x_i - x_j)$. Докажите, что $P$ представим в виде

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot Q(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где $Q$ — симметрический многочлен.

**6.** **(а)** Иван Александрович загадал три числа, после чего сообщил Антону Игоревичу их сумму, сумму квадратов и сумму кубов. Сможет ли Антон Игоревич восстановить исходные числа?
**(б)** А Юрию Алексеевичу Иван Александрович сообщил сумму чисел, сумму квадратов и сумму четвёртых степеней. Сможет ли Юрий Алексеевич восстановить исходные числа?
**(в)** А если Иван Александрович загадает $n$ чисел и сообщит их сумму, сумму их квадратов, сумму кубов, ..., сумму $n$-ых степеней?

**7.** В таблицу $3 \times 3$ записано девять чисел. Известно, что шесть чисел — суммы строк и суммы столбцов таблицы — равны между собой. Докажите, что сумма произведений строк таблицы равна сумме произведений её столбцов.

**8.** Докажите, что произведение всех чисел вида

$$\pm\sqrt{1} \pm \sqrt{2} \pm \ldots \pm \sqrt{2025}$$

является целым числом.

# Симметрические многочлены от трёх переменных

Рассмотрим многочлен $P(x) = x^3 - px^2 + qx - r$. Пусть числа $a, b, c$ корни уравнения $P(x) = 0$ (возможно, комплексные и не обязательно различные). Тогда $p, q, r$ представляют собой элементарные симметрические многочлены от переменных $a, b, c$: $p = \sigma_1(a, b, c)$, $q = \sigma_2(a, b, c)$, $r = \sigma_3(a, b, c)$.

**Определение.** *Дискриминантом* многочлена $P(x)$ называется выражение

$$D = (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2.$$

1. **(а)** Докажите, что дискриминант раскладывается на элементарные симметрические многочлены как $D = -4p^3r + p^2q^2 + 18pqr - 4q^3 - 27r^2$.
**(б)** Найдите необходимое и достаточное условие на тройку чисел $(p, q, r)$, для которого числа $a, b, c$ вещественные.
**(в)** Найдите необходимое и достаточное условие на тройку чисел $(p, q, r)$, для которого числа $a, b, c$ вещественные и неотрицательные. Тройку чисел $(p, q, r)$ удовлетворяющую данному условию мы будем называть *допустимой*.

2. **(а) Лемма о r.** Пусть для заданных $p = p_0$ и $q = q_0$ существует хотя бы одно такое $r$, что тройка $(p_0, q_0, r)$ допустима. Докажите, что

   - для минимального $r$ такого, что тройка $(p_0, q_0, r)$ допустима, в соответствующей тройке $a, b, c$ либо есть два равных числа, либо одно из чисел равно 0;
   - для максимального $r$ такого, что тройка $(p_0, q_0, r)$ допустима, в соответствующей тройке $a, b, c$ есть два равных числа.

   **(б) Лемма о q.** Пусть для заданных $p = p_0$ и $r = r_0$ существует хотя бы одно такое $q$, что тройка $(p_0, q, r_0)$ допустима. Докажите, что для минимального и максимального $q$ такого, что тройка $(p_0, q, r_0)$ допустима, в соответствующей тройке $a, b, c$ есть два равных числа.
**(в) Лемма о p.** Пусть для заданных $r = r_0 > 0$ и $q = q_0$ существует хотя бы одно такое $p$, что тройка $(p, q_0, r_0)$ допустима. Докажите, что для минимального и максимального $p$ такого, что тройка $(p, q_0, r_0)$ допустима, в соответствующей тройке $a, b, c$ есть два равных числа. Что произойдёт с утверждением, если $r_0 = 0$?

3. **(а)** Какие необходимые и достаточные условия на тройку чисел $(p, q, r)$ надо наложить, чтобы числа $a, b, c$ были вещественными и большими или равными единице?
**(б)** А чтобы числа $a, b, c$ являлись сторонами некоторого треугольника (возможно, вырожденного)?

# $pqr$-метод

**1.** Для неотрицательных чисел $a, b, c$ докажите, что

$$a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3 + 3a^2b^2c^2 \geqslant a^3b^2c + a^2b^3c + a^3bc^2 + ab^3c^2 + a^2bc^3 + ab^2c^3.$$

**2.** Известно, что $a, b, c \geqslant 0$ и $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Докажите, что

$$(a-1)(b-1)(c-1) \geqslant 8.$$

**3.** Для неотрицательных чисел $a, b, c$ верно, что $a + b + c = 1$. Докажите, что

$$1 + 12abc \geqslant 4(ab + bc + ac).$$

**4.** Для неотрицательных чисел $a, b, c$ докажите

$$a^3(a-b)(a-c) + b^3(b-a)(b-c) + c^3(c-a)(c-b) \geqslant 0.$$

**5.** Положительные вещественные числа удовлетворяют равенству $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{1+a+ab}{1+b+ab} + \frac{1+b+bc}{1+c+bc} + \frac{1+c+ca}{1+a+ca} \geqslant 3.$$

**6.** Известно, что $a, b, c \geqslant 1$ и $a + b + c = 9$. Докажите, что

$$\sqrt{ab + ac + bc} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

**Симметрическое преобразование.** Дана циклически симметричная функция $f(a, b, c)$. Введём функции $g(a, b, c) = f(a, b, c)f(a, c, b)$ и $h(a, b, c) = f(a, b, c) + f(a, c, b)$. Тогда (почему?) следующие системы неравенств эквивалентны:

$$\begin{cases} f(a,b,c) \geqslant 0 \\ f(a,c,b) \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} g(a,b,c) \geqslant 0 \\ h(a,b,c) \geqslant 0. \end{cases}$$

**7.** Известно, что $a, b, c \geqslant 0$ и $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$a^2b + b^2c + c^2a \leqslant 4.$$

Пусть даны переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Однородным симметрическим многочленом*, порождённым упорядоченным набором целых неотрицательных чисел $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$, называют выражение

$$T_{a_1,a_2,\ldots,a_n} = \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)}^{a_1} x_{\sigma(2)}^{a_2} \ldots x_{\sigma(n)}^{a_n},$$

где суммирование ведётся по множеству $S_n$ всех перестановок множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Пусть даны два упорядоченных набора целых неотрицательных чисел $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$. Тогда набор $(a)$ *мажорирует* набор $(b)$, если выполнены следующие условия:

$$a_1 \geqslant b_1, \quad a_1 + a_2 \geqslant b_1 + b_2, \quad \ldots, \quad a_1 + \ldots + a_{n-1} \geqslant b_1 + \ldots + b_{n-1},$$

$$a_1 + \ldots + a_n = b_1 + \ldots + b_n.$$

Если набор $(a)$ мажорирует набор $(b)$, то для неотрицательных значений переменных верно *неравенство Мюрхеда*:

$$T_{a_1,a_2,\ldots,a_n} \geqslant T_{b_1,b_2,\ldots,b_n}.$$

**1.** *(Неравенство Шура)* Докажите, что для любого натурального $n$ и любых неотрицательных значений переменных верно, что

$$T_{n+2,0,0} + T_{n,1,1} \geqslant 2T_{n+1,1,0}.$$

**2.** **(а)** Докажите неравенство Мюрхеда для таких наборов $(a), (b)$, что для некоторого индекса $i$ верно, что $a_i = b_i + 1$, для некоторого другого индекса $j$ верно, что $a_j = b_j - 1$, а для всех остальных индексов $a_l = b_l$.
**(б)** Докажите неравенство Мюрхеда в общем случае.

**3.** Докажите, что для любых $a, b, c > 0$ таких, что $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, верно, что

$$a^2bc + b^2ac + c^2ab \leqslant \frac{1}{3}.$$

**4.** Докажите, что для любых $a, b, c > 0$ таких, что $abc = 1$, верно, что

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+a)(1+c)} + \frac{c^3}{(1+b)(1+a)} \geqslant \frac{3}{4}.$$

**5.** Найдите максимальное $k$ такое, что для любых $a, b, c > 0$ верно, что

$$(ab + bc + ac)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{c+b}\right)^2 \geqslant k.$$

**6.** Докажите, что для любых $a \geqslant b \geqslant c > 0$ верно, что

$$a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 \geqslant a^3bc + b^3ac + c^3ab.$$

**7.** **(а)** Поймите, что неравенство Мюрхеда остается верным, если в условии на наборы поменять целые числа на рациональные. Докажите, что для наборов $(a), (b), (c)$ таких, что $c_i = \dfrac{a_i + b_i}{2}$ верно, что $\dfrac{T_{(a)} + T_{(b)}}{2} \geqslant T_{(c)}$.

**(б)** Докажите, что для любых $a, b, c > 0$ таких, что $abc \geqslant 1$, верно, что

$$\frac{a^5 - a^2}{a^5 + b^2 + c^2} + \frac{b^5 - b^2}{b^5 + a^2 + c^2} + \frac{c^5 - c^2}{c^5 + a^2 + b^2} \geqslant 0.$$

# 2 Геометрия

# Двойные отношения

*Двойным отношением* четвёрки точек $A$, $B$, $C$, $D$, лежащих на одной прямой, называется число

$$(A, B; C, D) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}.$$

А именно, это отношение отношений, в которых точки $C$ и $D$ делят отрезок $AB$.

*Двойным отношением прямых* $a$, $b$, $c$, $d$, пересекающихся в одной точке, называется число

$$(a, b; c, d) = \frac{\sin\angle(\vec{a}, \vec{c})}{\sin\angle(\vec{b}, \vec{c})} : \frac{\sin\angle(\vec{a}, \vec{d})}{\sin\angle(\vec{b}, \vec{d})},$$

где $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ — произвольные векторы, направленные вдоль соответствующих прямых, $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ — ориентированный угол (с точностью до $2\pi$).

**Утверждение.** Прямые $a$, $b$, $c$, $d$ пересекаются в одной точке, прямая $\ell$ пересекает их в различных точках $A$, $B$, $C$, $D$ соответственно. Тогда $(a, b; c, d) = (A, B; C, D)$.

Четвёрка точек или прямых называется *гармонической*, если их двойное отношение равно $-1$.

## Теория

**1.** Известно, что $(A, B; C, D) = \lambda$. Найдите $(B, A; C, D)$, $(A, B; D, C)$ и $(A, C; B, D)$. Осознайте, что с помощью этого можно найти двойное отношение для любой перестановки точек.

**2.** Докажите, что следующие четвёрки гармонические:
**(а)** $A$, $B$, $M$, $\infty$, где $M$ — середина отрезка $AB$;
**(б)** $a$, $b$, $c$, $d$, где прямые $c$ и $d$ — внутренняя и внешняя биссектрисы угла между прямыми $a$ и $b$;
**(в)** $B$, $C$, $A_1$, $A_2$, где $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ — чевианы треугольника, пересекающиеся в одной точке, $A_2$ — точка пересечения прямых $B_1C_1$ и $BC$;
**(г)** центры двух окружностей и их центры отрицательной и положительной гомотетии;
**(д)** такие точки $A$, $B$, $C$, $D$, что для середины $M$ отрезка $AB$ выполнено равенство $MA^2 = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$.

**3.** Про точки $A$, $B$, $C$, $D$, $D_1$, лежащие на одной прямой, известно, что $(A, B; C, D) = (A, B; C, D_1)$. Докажите, что $D = D_1$.

**4.** Две прямые пересекаются в точке $P$. На одной прямой выбраны точки $A$, $B$, $C$, а на другой — точки $A_1$, $B_1$, $C_1$. Докажите, что если $(P, A; B, C) = (P, A_1; B_1, C_1)$, то прямые $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ пересекаются в одной точке (возможно, бесконечно удалённой).

**5.** Прямые $a$, $b$, $c$, $d$ пересекаются в одной точке. Докажите, что если $c \perp d$ и $(a, b; c, d) = -1$, то $c$ и $d$ — биссектрисы углов, образованных прямыми $a$ и $b$.

## Задачи

**6.** Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке $R$, продолжения сторон $AB$ и $CD$ — в точке $P$, а продолжения сторон $BC$ и $AD$ — в точке $Q$.

**(а)** Прямая, проходящая через точку $R$, пересекает прямые $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ в точках $M$, $X$, $N$, $Y$. Докажите, что $R$ делит пополам отрезок $MN$ тогда и только тогда, когда $R$ делит пополам отрезок $XY$.

**(б)** Обозначим через $T$ проекцию точки $R$ на прямую $PQ$. Докажите, что противоположные стороны четырёхугольника видны из точки $T$ под равными углами.

**7.** Внутри угла с вершиной $O$ отмечена точка $P$. Рассматриваются всевозможные пары точек $X$ и $Y$ на сторонах угла такие, что $\angle OPX = \angle OPY$. Докажите, что все прямые $XY$ проходят через одну точку.

**8.** В треугольнике $ABC$ проведена биссектриса $AL$ и биссектриса внешнего угла $AN$. Точка $M$ — середина стороны $AC$, $P$ — точка пересечения прямых $AB$ и $ML$. Докажите, что $PA = PN$.

**9.** Пусть $H_a$ и $L_a$ — основание высоты и биссектрисы треугольника $ABC$, проведённых из вершины $A$; вписанная и вневписанная окружности касаются стороны $BC$ в точках $K_a$ и $T_a$ соответственно.

**(а)** Докажите, что $(H_a, L_a; K_a, T_a) = -1$;

**(б)** Пусть $I$ и $I_a$ — центр вписанной и вневписаной окружностей треугольника $ABC$. Докажите, что прямые $H_aI$ и $H_aI_a$ симметричны относительно прямой $BC$.

**(в)** Определим аналогично точки $H_b$, $L_b$, $K_b$, $T_b$. Докажите, что прямые $H_aH_b$, $L_aL_b$, $T_aT_b$, $K_aK_b$ пересекаются в одной точке.

# Двойные отношения на окружности

**Определение.** *Двойным отношением* $(A, B; C, D)$ различных точек $A$, $B$, $C$, $D$, лежащих на одной окружности, называют величину $(PA, PB; PC, PD)$, где $P$ — произвольная точка той же окружности.

Эта величина не зависит от выбора точки $P$. Точка $P$ может совпадать с одной из точек $A$, $B$, $C$, $D$, тогда соответствующая секущая вырождается в касательную к окружности.

**Утверждение.** При инверсии сохраняется двойное отношение четырёх точек, лежащих на обобщённой окружности.

Из этого следует, что двойное отношение сохраняется при проекции с окружности на себя: если через точку $P$ проведены четыре секущие, пересекающие окружность в точках $A$ и $A_1$, $B$ и $B_1$, $C$ и $C_1$, $D$ и $D_1$, то $(A, B; C, D) = (A_1, B_1; C_1, D_1)$ (но оно не обязательно равно двойному отношению прямых $PA$, $PB$, $PC$, $PD$).

**1.** **(а)** Докажите, что для гармонического четырёхугольника $ABCD$ выполнено равенство $(A, C; B, D) = -1$.
**(б)** Из точки $P$ провели касательные $PX$ и $PY$ к окружности $\omega$ и секущую, которая пересекла $\omega$ в точках $A$ и $B$, а прямую $XY$ — в точке $C$. Докажите, что $(A, B; C, P) = -1$.

**2.** Биссектриса внутреннего угла при вершине $A$ треугольника $ABC$ пересекает $(ABC)$ в точке $D$, а биссектриса внешнего угла пересекает $BC$ в точке $E$. Симедиана, поведённая из вершины $A$, пересекает $(ABC)$ в точке $L$. Докажите, что $D$, $E$, $L$ лежат на одной прямой.

**3.** В угол $BAC$ вписана окружность $\omega$, касающаяся сторон угла в точках $B$, $C$. Хорда $CD$ окружности $\omega$ параллельна прямой $AB$. Прямая $AD$ второй раз пересекает $\omega$ в точке $E$. Докажите, что прямая $CE$ делит отрезок $AB$ пополам.

**4.** Дан треугольник $ABC$ и точка $M$. Прямая, проходящая через $M$, пересекает $AB$, $BC$, $CA$ в $C_1$, $A_1$, $B_1$ соответственно. Прямые $AM$, $BM$, $CM$ пересекают окружность $(ABC)$ в точках $A_2$, $B_2$, $C_2$ соответственно. Докажите, что $A_1A_2$, $B_1B_2$, $C_1C_2$ пересекаются в одной точке, лежащей на $(ABC)$.

**5.** Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность $\Omega$. Касательная к $\Omega$, проведённая в точке $D$, пересекает прямую $AC$ в точке $K$. Прямая, проходящая через $K$, пересекает отрезки $AB$ и $BC$ в точках $P$ и $Q$, а окружность $\omega$ — в точках $X$ и $Y$. Оказалось, что диагональ $BD$ делит пополам отрезок $PQ$. Докажите, что она делит пополам и отрезок $XY$.

**6.** **(а) Теорема о бабочке.** Хорды $AC$ и $BD$ окружности $\omega$ проходят через середину хорды $MN$. Отрезки $AD$ и $BC$ пересекают отрезок $MN$ в точках $X$ и $Y$. Докажите, что $XM = YN$.
**(б) Теорема о двойной бабочке.** На хорде $MN$ окружности $\omega$ отмечены

точки $M_1$ и $N_1$ такие, что $MM_1 = NN_1$. Хорда $AC$ проходит через точку $M_1$, а хорда $BD$ — через точку $N_1$. Отрезки $AD$ и $BC$ пересекают $MN$ в точках $X$ и $Y$ соответственно. Докажите, что $XM = YN$.

**7.** Из точки $P$ вне окружности $\omega$ проведены касательные $PX$ и $PY$ и две секущие, пересекающие окружность в точках $A$ и $B$, $C$ и $D$. Докажите, что точки пересечения прямых $AC$ и $BD$, $AD$ и $BC$ лежат на прямой $XY$.

**8.** Окружность проходит через вершины $B$ и $C$ треугольника $ABC$ и повторно пересекает отрезки $AB$ и $AC$ в точках $C_1$ и $B_1$ соответственно. Отрезки $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в точке $P$, прямая $AP$ пересекает отрезок $BC$ в точке $A_1$. Докажите, что окружность $(A_1B_1C_1)$ проходит через середину отрезка $BC$.

# Двойные отношения. Добавка

**1.** Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Точки $Q$, $A$, $B$, $P$ лежат на одной прямой именно в таком порядке. Прямая $AC$ касается окружности $(ADQ)$, а прямая $BD$ касается окружности $(BCP)$. Точки $M$ и $N$ — середины сторон $BC$ и $AD$ соответственно. Докажите, что следующие касательная к $(ANQ)$ в точке $A$, касательная к $(BMP)$ в точке $B$ пересекаются на прямой $CD$.

**2.** На стороне $BC$ треугольника $ABC$ выбрана точка $D$. Окружности, вписанные в треугольники $ABD$ и $ACD$ касаются отрезка $BC$ в точках $E$ и $F$ соответственно. Линия центров окружностей пересекает отрезок $AD$ в точке $P$. Прямые $BP$ и $CP$ пересекают биссектрисы углов $C$ и $B$ в точках $Y$ и $X$ соответственно. Докажите, что прямые $EX$ и $FY$ пересекаются на вписанной окружности треугольника $ABC$.

**3.** Биссектрисы углов $B$ и $C$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $I$ и пересекают окружность $(ABC)$ в точках $B_1$ и $C_1$ соответственно. Точка $D$ — середина дуги $BAC$. Окружности $\omega_b$ и $\omega_c$ касаются прямых $AB$ и $AC$ соответственно и окружности $(ABC)$ внутренним образом в точках $B_1$ и $C_1$ соответственно. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения $\omega_b$ и $\omega_c$, пересекается с прямой $DI$ на $(ABC)$.

**4.** Обозначим за $\omega$ и $\omega_a$ вписанную окружность треугольника $ABC$ и его вневписанную окружность напротив вершины $A$. Точка $P \in \omega$ такова, что $(BPC)$ касается $\omega$, а точка $Q \in \omega_a$ такова, что $(BQC)$ касается $\omega_a$. Лучи $AP$ и $AQ$ пересекают $BC$ в $X$ и $Y$. Докажите, что $BX = CY$.

# Поляры

**Определение.** Дана окружность $\omega$ с центром $O$ и точка $P$. *Полярой* точки $P$ относительно $\omega$ называется прямая $\ell$, которая проходит через инверсную точку $P'$ перпендикулярно прямой $OP$. Точка $P$ называется *полюсом* прямой $\ell$.

Полюсом бесконечно удалённой прямой будем считать центр окружности. Полюсом прямой $\ell$, проходящей через центр $\omega$ будем считать бесконечно удалённую точку, соответствующему перпендикулярному $\ell$ направлению.

Таким образом, мы задали биекцию между точками и прямыми на проективной плоскости. Замена точек на соответствующие им прямые и наоборот называется *полярным преобразованием.*

- Если точка $P$ лежит вне $\omega$, то её поляра — это прямая $XY$, где $PX$ и $PY$ — касательные к $\omega$.
- Пусть через точки $P$ проведены две секущие, пересекающие окружность в точках $A$ и $B$, $C$ и $D$. Тогда точки пересечения прямых $AC$ и $BD$, $AD$ и $BC$ лежат на поляре точки $P$ относительно $\omega$.
- Через точку $P$ проведена секущая, пересекающая окружность $\omega$ в точках $A$ и $B$, а её поляру — в точке $C$. Тогда $(A, B; C, P) = -1$.
- Если $A$ лежит на поляре $B$, то $B$ лежит на поляре $A$.
- Точки $A$, $B$, $C$ лежат на одной прямой $\Leftrightarrow$ их поляры $a$, $b$, $c$ пересекаются в одной точке.

**1.** Четырёхугольник вписан в окружность с центром $O$. Обозначим точки пересечения противоположных сторон и точку пересечения диагоналей четырехугольника через $P$, $Q$ и $R$. Докажите, что $O$ — ортоцентр треугольника $PQR$.

**2.** На окружности даны точки $A$, $B$, $C$, $X$ и $Y$. Прямые $AX$ и $BY$ пересекаются в точке $C_1$, а прямые $AY$ и $BX$ — в точке $C_2$. Аналогично определяются точки $B_1$, $B_2$ и $A_1$, $A_2$. Докажите, что прямые $A_1A_2$, $B_1B_2$ и $C_1C_2$ пересекаются в одной точке.

**3.** **(а)** Вписанная окружность описанного четырёхугольника $ABCD$ касается есть сторон $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ в точках $K$, $L$, $M$, $N$ соответственно. Прямые $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $P$, прямые $AD$ и $BC$ — в точке $Q$, прямые $KL$ и $MN$ — в точке $R$, прямые $KN$ и $LM$ — в точке $S$. Докажите, что $P$, $Q$, $R$, $S$ лежат на одной прямой.
**(б)** Докажите, что в описанном четырёхугольнике точка пересечения диагоналей совпадает с точкой пересечения диагоналей четырёхугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами.
**(в)** Докажите, что во вписанной-описанном четырёхугольнике точка пересечения диагоналей лежит на прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей.

**(г)** Докажите, что все четырёхугольники, одновременно вписанные в окружность $\Omega$ и описанные вокруг окружности $\omega$, имеют общую точку пересечения диагоналей.

**4.** Касательные в точках $A$ и $B$ к описанной окружности треугольника $ABC$ пересекаются в точке $X$, а касательные в точках $A$ и $C$ пересекаются в точке $Y$. Точка $Z$ плоскости такова, что $XZ \parallel AB$ и $YZ \parallel AC$. Докажите, что $ZB = ZC$.

**5.** В треугольнике $ABC$ вписанная окружность $\omega$ касается сторон $AB$ и $AC$ в точках $C_1$ и $B_1$. Оказалось, что прямые $BC$, $B_1C_1$ и касательная к $(ABC)$ в точке $A$ пересекаются в одной точке $D$. Докажите, что $D$ лежит на прямой, соединяющей центры $\omega$ и $(ABC)$.

**6.** Вписанная в треугольник $ABC$ окружность касается сторон $BC$, $CA$, $AB$ в точках $A_1$, $B_1$, $C_1$ соответственно, точка $I$ — её центр. Докажите, что медиана, проведённая из вершины $A$, отрезок $B_1C_1$ и прямая $IA_1$ пересекаются в одной точке.

**7.** Через центр вписанной окружности $I$ треугольника $ABC$ провели прямые $\ell_a$, $\ell_b$, $\ell_c$, перпендикулярные биссектрисам $AI$, $BI$, $CI$ соответственно.

**(а)** Докажите, что точки пересечения этих прямых со сторонами $BC$, $AC$, $AB$ соответственно лежат на одной прямой.

**(б)** Некоторая касательная к вписанной окружности пересекает эти прямые в точках $A_1$, $B_1$, $C_1$ соответственно. Докажите, что прямые $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ пересекаются в одной точке.

# Поляры. Добавка

**1.** В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность с центром в точке $I$. Докажите, что ортоцентры треугольников $AIB$, $BIC$, $CID$, $DIA$ лежат на одной прямой, проходящей через точку пересечения диагоналей $ABCD$.

**2.** Четырёхугольник вписан в окружность $\omega$. Продолжения противоположных сторон пересекаются в точках $P$ и $Q$, а диагонали — в точке $T$. Точка $M$ — середина $PQ$. Отрезок $MT$ пересекает $\omega$ в точке $X$. Докажите, что окружность $(PXQ)$ касается $\omega$.

**3.** В треугольнике $ABC$ биссектрисы $AA_1$ и $CC_1$ пересекаются в точке $I$. Прямая, проходящая через точку $B$ параллельно $AC$ пересекает лучи $AA_1$ и $CC_1$ в точках $A_2$ и $C_2$ соответственно. Точка $O_a$ — центр описанной окружности треугольника $AC_1C_2$, точка $O_c$ — центр описанной окружности треугольника $CA_1A_2$. Докажите, что $\angle O_aBO_c = \angle AIC$.

**4.** Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Обозначим через $L_a$ точку Лемуана треугольника $BCD$, аналогично определим точки $L_b$, $L_c$, $L_d$. Оказалось, что четырёхугольник $L_aL_bL_cL_d$ вписанный. Докажите, что у $ABCD$ есть две параллельные стороны.

# Заключительный разнобой

1. Дан треугольник $ABC$. Точки $A_1$, $B_1$ и $C_1$ на прямых $BC$, $CA$ и $AB$ соответственно таковы, что $B_1$ и $C_1$ лежат на поляре точки $A_1$ относительно $(ABC)$. Докажите, что $C_1$ лежит на поляре точки $B_1$ относительно $(ABC)$.

2. Вписанная окружность касается сторон $AB$, $AC$, $BC$ треугольника $ABC$ в точках $C_1$, $B_1$, $A_1$ соответственно. Точка $H$ — проекция $A_1$ на прямую $B_1C_1$. Докажите, что $HA_1$ — биссектриса угла $BHC$.

3. Точки $D$ и $E$ — проекции вершин $B$ и $C$ на биссектрису угла $A$ треугольника $ABC$. Окружность, построенная на $DE$ как на диаметре, пересекает сторону $BC$ в точках $X$ и $Y$. Докажите, что $\angle BAX = \angle CAY$.

4. Диагональ $AC$ описанного четырёхугольника $ABCD$ пересекает его вписанную окружность в точках $X$ и $Y$, точка $M$ — середина $XY$. Докажите, что $\angle BMC = \angle DMC$.

# 3 Комбинаторика

# Выпуклость

**Определение.** Множество точек называется выпуклым, если для любых двух точек, принадлежащих ему, верно, что весь отрезок, соединяющий эти 2 точки, принадлежит этому множеству.

**Утверждение.** Пересечение любого (в том числе и бесконечного!) множества выпуклых множеств является выпуклым множеством.

**Определение.** Выпуклым многоугольником называется многоугольник (т. е. замкнутая несамопересекающаяся ломаная), лежащий в одной полуплоскости относительно любой из прямых, содержащих его стороны.

**Теорема 1.** Многоугольник является выпуклым, если выполнено одно из следующих равносильных утверждений:

- часть плоскости, им ограниченная, является выпуклым множеством;
- он лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону;
- все его внутренние углы меньше $180°$;
- все его диагонали лежат полностью внутри него;
- граница видна полностью из любой его внутренней точки;
- из любой внешней точки он виден под углом, меньшим $180°$.

**Определение.** Выпуклой оболочкой множества точек $A$ называется наименьшее по включению (содержащееся в любом другом) выпуклое множество, содержащее все точки множества $A$.

**Теорема 2.** У множества точек на плоскости существует единственная выпуклая оболочка.

**1.** Докажите, что выпуклая оболочка конечного множества точек является многоугольником с вершинами в некоторых из этих точек.

**2.** На плоскости даны $2n + 3$ точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой, а никакие четыре не лежат на одной окружности. Докажите, что из этих точек можно выбрать три точки так, что $n$ из оставшихся точек лежат внутри окружности, проведённой через выбранные точки, а $n$ вне.

**3.** Даны $n$ точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Через каждую пару точек проведена прямая. Какое минимальное число попарно непараллельных прямых может быть среди них?

**4.** На плоскости дано конечное число точек. Докажите, что из них всегда можно выбрать точку, для которой ближайшими к ней являются не более трёх данных точек.

**5.** **Теорема Минковского для плоскости.** Начало координат является центром симметрии выпуклой фигуры площадью более 4. Докажите, что эта фигура содержит хотя бы одну точку с целыми координатами, отличную от начала координат.

**6.** **(а)** Во всех узлах целочисленной решётки, кроме одного, в котором находится охотник, растут деревья, стволы которых имеют радиус $r$. Докажите, что охотник не сможет увидеть зайца, находящегося от него на расстоянии больше $1/r$.

**(б)** Пусть $n$ — натуральное число. Во всех точках целочисленной решётки, расположенных строго внутри окружности радиуса $\sqrt{n^2+1}$ с центром в начале координат и отличных от начала координат, растут деревья радиуса $r$. Докажите, что если $r < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, то на указанной окружности есть точка, которую можно увидеть из начала координат.

**7.** Внутри выпуклого стоугольника выбрано $k$ точек, $2 \leqslant k \leqslant 50$. Докажите, что можно отметить $2k$ вершин стоугольника так, чтобы все выбранные точки оказались внутри $2k$-угольника с отмеченными вершинами.

**8.** Докажите, что выпуклый многоугольник может быть разрезан непересекающимися диагоналями на остроугольные треугольники не более чем одним способом.

# Теорема Хелли на плоскости

1. **(а)** На плоскости расположены $k \geqslant 4$ точки. Докажите, что их можно разбить на две группы так, чтобы выпуклые оболочки групп пересекались.
   **(б) Теорема Хелли.** На плоскости расположено конечное число выпуклых множеств, у любых трёх из которых есть общая точка. Докажите, что у всех множеств есть общая точка.
   **(в)** Докажите, что теорема Хелли неверна для бесконечного числа множеств.

2. Докажите, что в любом выпуклом семиугольнике найдётся точка, не принадлежащая ни одному из четырёхугольников, образованных четвёрками его последовательных вершин.

3. На окружности отметили несколько дуг длины меньше половины окружности. Известно, что любые три дуги имеют общую точку. Докажите, что все дуги имеют общую точку.

4. **Теорема Юнга.** На плоскости даны несколько точек, причём расстояние между любыми двумя не превосходит 1. Докажите, что все точки можно накрыть кругом радиуса $1/\sqrt{3}$.

5. **Теорема Бляшке.** Про выпуклый многоугольник $M$ известно, что для любой прямой длина отрезка, служащего проекцией многоугольника $M$ на эту прямую, не меньше 1. Докажите, что $M$ заключает внутри себя круг радиуса $1/3$.

6. Дано несколько вертикальных отрезков. Для любых трёх из них найдётся прямая, их пересекающая. Докажите, что найдётся прямая, пересекающая все эти отрезки.

7. Докажите, что в любом выпуклом многоугольнике найдется такая точка $O$, что для любых точек $A$ и $B$ на его границе таких, что $O$ лежит на отрезке $AB$, выполнено $AO \geqslant AB/3$.

8. **Теорема Красносельского.** Дан не обязательно выпуклый многоугольник $M$. Известно, что для любых трёх точек его границы можно указать точку внутри $M$, из которой видны эти точки. Докажите, что существует точка внутри $M$, из которой видны полностью все стороны $M$.

# ЧУМы, цепи и антицепи

В рамках этого листика *частично упорядоченным множеством* будем называть любой ориентированный граф (без петель и кратных стрелок) с конечным числом вершин, в котором выполнено свойство *транзитивности*: для любых трёх вершин $A$, $B$, $C$ если есть стрелки $A \to B$, $B \to C$, то есть стрелка $A \to C$.

*Цепь* — это последовательность $A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_n$ некоторых вершин графа, любые два соседних элемента которой соединены стрелкой. *Антицепь* — набор $\{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ вершин графа, никакие два из которых не соединены стрелкой.

**Теорема Мирского.** В частично упорядоченном множестве число вершин в самой большой цепи равно минимальному количеству антицепей, на которые оно разбивается.

**Теорема Дилуорса.** В частично упорядоченном множестве число вершин в самой большой антицепи равно минимальному количеству цепей, на которые оно разбивается.

**1.** В ящике с пакетами лежит 100 пакетов. Известно, что нет цепочки из 11 последовательно вложенных друг в друга пакетов. Докажите, что все пакеты можно раскрасить в 10 цветов так, чтобы никакие два пакета одного цвета не лежали один внутри другого.

**2.** **(а)** Докажите теорему Мирского.
**(б)** В частичном упорядоченном множестве в самой длинной цепи $n$ вершин, а самой большой антицепи — $m$ вершин. Докажите, что в этом ЧУМе всего не более $nm$ вершин.

**3.** Есть набор из 2025 неравных клетчатых прямоугольников, стороны которых не превосходят 1000 клеток. Докажите, что можно найти пять прямоугольников, которые можно по цепочке засунуть друг в друга.

**4.** Для данных натуральных $r$ и $s$ докажите, что любая последовательность различных вещественных чисел длины $rs+1$ содержит монотонно возрастающую подпоследовательность длины $r+1$ или монотонно убывающую длины $s+1$.

**5.** На прямой нарисованы несколько отрезков. Оказалось, что среди любых $(n+1)$ отрезков какие-то два пересекаются. Докажите, что можно взять $n$ гвоздей и прибить ими все отрезки к прямой.

**6.** Какое наибольшее число шашек можно расставить в клетках таблицы $n \times n$ так, чтобы выполнялось условие: если шашка $A$ находится ниже и правее шашки $B$, то они находятся в соседних по диагонали клетках?

**7.** Вершины графа $G$ невозможно раскрасить правильным образом в 10 цветов, но можно в 11. Докажите, что для любой правильной раскраски вершин графа $G$ в 11 цветов в нём можно найти простой путь из 11 разноцветных вершин.

# Теорема Дилуорса

**Теорема Дилуорса.** В частично упорядоченном множестве число вершин в самой большой антицепи равно минимальному количеству цепей, на которые оно разбивается.

В этом листике доказываем теорему Дилуорса двумя способами: индукцией по числу вершин и через теорему Кёнига.

**1.** (*Доказательство по индукции*) Рассмотрим кукую-то вершину $u$ нашего частично упорядоченного множества $M$, в которую не входит ни одной стрелки. По предположению индукции если $m$ — размер максимальной антицепи в $M \setminus \{u\}$, то тогда $M \setminus \{u\}$ разбивается на $m$ непересекающихся цепей: $M \setminus \{u\} = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_m$. Назовём элемент $x \in M \setminus \{u\}$ *интересным*, если он лежит в какой-нибудь максимальной антицепи множества $M \setminus \{u\}$.
**(а)** Обозначим через $x_i$ наибольший (относительно частичного порядка) интересный элемент цепи $C_i$. Докажите, что $\{x_1, \ldots, x_m\}$ — антицепь.
**(б)** Попытайтесь добавить вершину $u$ к антицепи $\{x_1, \ldots, x_m\}$ и завершите доказательство.

**2.** (*Доказательство через теорему Кёнига о максимальном паросочетании*) Рассмотрим двудольный граф $G$: обе доли — это копии нашего частично упорядоченного множества $M$; если в множестве $M$ была стрелка $A \to B$, то в графе $G$ соединим вершину $A$ левой доли с вершиной $B$ правой доли ребром.
**(а)** Докажите, что размер минимального разбиения множества $M$ на цепи равен разности числа $|M|$ и размера максимального паросочетания в $G$.
**(б)** Докажите, что размер максимальной антицепи в множестве $M$ равен разности числа $|M|$ и размера минимального вершинного покрытия рёбер в $G$. Завершите доказательство.

**Часть III**

# Группа 9–3

# 1 Алгебра

# Симметрические многочлены

**Определение.** Многочлен $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от $n$ переменных называется *симметрическим*, если для любой перестановки $\sigma \in S_n$ выполняется

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

**Определение.** *Элементарными симметрическими многочленами* называются многочлены $\sigma_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\sigma_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \dots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}.$$

**1.** Выразите через элементарные симметрические многочлены
**(а)** $a^3 + b^3 + c^3$,
**(б)** $a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$,
**(в)** $(ab)^3 + (bc)^3 + (ca)^3$.

**Основная теорема о симметрических многочленах.** Любой симметрический многочлен можно единственным образом представить, как многочлен от элементарных симметрических многочленов.

**Определение.** Говорят, что упорядоченный набор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ лексикографически больше набора $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, если существует такой индекс $i$, для которого верно $\alpha_i > \beta_i$ и $\alpha_j = \beta_j$, для $j < i$.

Таким образом мы можем упорядочить множество строк длины $n$. Такой порядок называется *лексикографическим.*

**2.** Пусть дан симметрический многочлен от $n$ переменных $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Рассмотрим все его мономы. Назовем моном $ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ старшим, если упорядоченный набор показателей $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ лексикографически больше упорядоченных наборов показателей остальных мономов относительно лексикографического порядка.
**(а)** Докажите, что старший моном произведения двух многочленов равен произведению старших мономов сомножителей.
**(б)** Докажите, что для любого монома $q = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$; $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n$ существуют такие неотрицательные числа $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$, что старший моном многочлена $\sigma_1^{\beta_1} \sigma_2^{\beta_2} \ldots \sigma_n^{\beta_n}$ совпадает с $q$, причем числа определены однозначно.
**(в)** Докажите основную теорему о симметрических многочленах.

**3.** Дан многочлен $P_n(x)$ степени $n$ с рациональными коэффициентами. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — его корни (возможно, комплексные). Также дан симметрический многочлен $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с рациональными коэффициентами. Докажите, что число $Q(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ рационально.

**4.** Многочлен $x^{1000} + y^{1000}$ выразили через элементарные симметрические, как $P(x + y, xy)$. Найдите сумму коэффициентов многочлена $P$.

**5.** Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ — корни многочлена $x^4 + px^2 + qx + r$. Найдите многочлен 3-й степени, корнями которого являются числа

$$\beta_1 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4, \beta_2 = \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4, \beta_3 = \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3.$$

**6.** **(а)** Иван Александрович загадал три числа, после чего сообщил Антону Игоревичу их сумму, сумму квадратов и сумму кубов. Сможет ли Антон Игоревич восстановить исходные числа?

**(б)** А Юрию Алексеевичу Иван Александрович сообщил сумму чисел, сумму квадратов и сумму четвёртых степеней. Сможет ли Юрий Алексеевич восстановить исходные числа?

**7.** Пусть $\alpha$ — корень многочлена $P(x)$ с рациональными коэффициентами, $\beta$ — корень многочлена $Q(x)$ с рациональными коэффициентами. Докажите, что найдется многочлен с рациональными коэффициентами, корнем которого является $\alpha + \beta$.

# Симметрические многочлены от трёх переменных

Рассмотрим многочлен $P(x) = x^3 - px^2 + qx - r$. Пусть числа $a, b, c$ корни уравнения $P(x) = 0$ (возможно, комплексные и не обязательно различные). Тогда $p, q, r$ представляют собой элементарные симметрические многочлены от переменных $a, b, c$: $p = \sigma_1(a, b, c)$, $q = \sigma_2(a, b, c)$, $r = \sigma_3(a, b, c)$.

**Определение.** *Дискриминантом* многочлена $P(x)$ называется выражение

$$D = (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2.$$

1. **(а)** Докажите, что дискриминант раскладывается на элементарные симметрические многочлены как $D = -4p^3r + p^2q^2 + 18pqr - 4q^3 - 27r^2$.
**(б)** Найдите необходимое и достаточное условие на тройку чисел $(p, q, r)$, для которого числа $a, b, c$ вещественные.
**(в)** Найдите необходимое и достаточное условие на тройку чисел $(p, q, r)$, для которого числа $a, b, c$ вещественные и неотрицательные. Тройку чисел $(p, q, r)$ удовлетворяющую данному условию мы будем называть *допустимой*.

2. **(а) Лемма о r.** Пусть для заданных $p = p_0$ и $q = q_0$ существует хотя бы одно такое $r$, что тройка $(p_0, q_0, r)$ допустима. Докажите, что

   - для минимального $r$ такого, что тройка $(p_0, q_0, r)$ допустима, в соответствующей тройке $a, b, c$ либо есть два равных числа, либо одно из чисел равно 0;
   - для максимального $r$ такого, что тройка $(p_0, q_0, r)$ допустима, в соответствующей тройке $a, b, c$ есть два равных числа.

   **(б) Лемма о q.** Пусть для заданных $p = p_0$ и $r = r_0$ существует хотя бы одно такое $q$, что тройка $(p_0, q, r_0)$ допустима. Докажите, что для минимального и максимального $q$ такого, что тройка $(p_0, q, r_0)$ допустима, в соответствующей тройке $a, b, c$ есть два равных числа.
**(в) Лемма о p.** Пусть для заданных $r = r_0 > 0$ и $q = q_0$ существует хотя бы одно такое $p$, что тройка $(p, q_0, r_0)$ допустима. Докажите, что для минимального и максимального $p$ такого, что тройка $(p, q_0, r_0)$ допустима, в соответствующей тройке $a, b, c$ есть два равных числа. Что произойдёт с утверждением, если $r_0 = 0$?

3. **(а)** Какие необходимые и достаточные условия на тройку чисел $(p, q, r)$ надо наложить, чтобы числа $a, b, c$ были вещественными и большими или равными единице?
**(б)** А чтобы числа $a, b, c$ являлись сторонами некоторого треугольника (возможно, вырожденного)?

# $pqr$-метод

**1.** Для неотрицательных чисел $a, b, c$ докажите, что

$$a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3 + 3a^2b^2c^2 \geqslant a^3b^2c + a^2b^3c + a^3bc^2 + ab^3c^2 + a^2bc^3 + ab^2c^3.$$

**2.** Известно, что $a, b, c > 0$ и $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Докажите, что

$$(a-1)(b-1)(c-1) \geqslant 8.$$

**3.** Для неотрицательных чисел $a, b, c$ верно, что $a + b + c = 1$. Докажите, что

$$1 + 12abc \geqslant 4(ab + bc + ac).$$

**4.** Для неотрицательных чисел $a, b, c$ докажите

$$a^3(a-b)(a-c) + b^3(b-a)(b-c) + c^3(c-a)(c-b) \geqslant 0.$$

**5.** Положительные вещественные числа удовлетворяют равенству $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{1+a+ab}{1+b+ab} + \frac{1+b+bc}{1+c+bc} + \frac{1+c+ca}{1+a+ca} \geqslant 3.$$

**6.** Известно, что $a, b, c \geqslant 1$ и $a + b + c = 9$. Докажите, что

$$\sqrt{ab+ac+bc} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

**Симметрическое преобразование.** Дана циклически симметричная функция $f(a, b, c)$. Введём функции $g(a, b, c) = f(a, b, c)f(a, c, b)$ и $h(a, b, c) = f(a, b, c)+f(a, c, b)$. Тогда (почему?) следующие системы неравенств эквивалентны:

$$\begin{cases} f(a,b,c) \geqslant 0 \\ f(a,c,b) \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} g(a,b,c) \geqslant 0 \\ h(a,b,c) \geqslant 0. \end{cases}$$

**7.** Известно, что $a, b, c \geqslant 0$ и $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$a^2b + b^2c + c^2a \leqslant 4.$$

# Неравенство Мюрхеда

Пусть даны переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Однородным симметрическим многочленом*, порождённым упорядоченным набором целых неотрицательных чисел $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$, называют выражение

$$T_{a_1,a_2,\ldots,a_n} = \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)}^{a_1} x_{\sigma(2)}^{a_2} \ldots x_{\sigma(n)}^{a_n},$$

где суммирование ведётся по множеству $S_n$ всех перестановок множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Пусть даны два упорядоченных набора целых неотрицательных чисел $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$. Тогда набор $(a)$ *мажорирует* набор $(b)$, если выполнены следующие условия:

$$a_1 \geqslant b_1, \quad a_1 + a_2 \geqslant b_1 + b_2, \quad \ldots, \quad a_1 + \ldots + a_{n-1} \geqslant b_1 + \ldots + b_{n-1},$$

$$a_1 + \ldots + a_n = b_1 + \ldots + b_n.$$

Если набор $(a)$ мажорирует набор $(b)$, то для неотрицательных значений переменных верно *неравенство Мюрхеда*:

$$T_{a_1,a_2,\ldots,a_n} \geqslant T_{b_1,b_2,\ldots,b_n}.$$

**1.** *(Неравенство Шура)* Докажите, что для любого натурального $n$ и любых неотрицательных значений переменных верно, что

$$T_{n+2,0,0} + T_{n,1,1} \geqslant 2T_{n+1,1,0}.$$

**2.** **(а)** Докажите неравенство Мюрхеда для таких наборов $(a), (b)$, что для некоторого индекса $i$ верно, что $a_i = b_i + 1$, для некоторого другого индекса $j$ верно, что $a_j = b_j - 1$, а для всех остальных индексов $a_l = b_l$.
**(б)** Докажите неравенство Мюрхеда в общем случае.
**(в)** Докажите, что неравенство Мюрхеда остается верным, если в условии на наборы поменять целые числа на рациональные.

**3.** Докажите, что для любых $a, b, c > 0$ таких, что $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, верно, что

$$a^2bc + b^2ac + c^2ab \leqslant \frac{1}{3}.$$

**4.** Докажите, что для любых $a, b, c > 0$ таких, что $abc = 1$, верно, что

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

**5.** Найдите максимальное $k$ такое, что для любых $a, b, c > 0$ верно, что

$$(ab + bc + ac)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{c+b}\right)^2 \geqslant k.$$

**6.** Докажите, что для любых $a \geqslant b \geqslant c > 0$ верно, что

$$a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 \geqslant a^3bc + b^3ac + c^3ab.$$

**7.** **(а)** Докажите, что для наборов $(a), (b), (c)$ таких, что $c_i = \dfrac{a_i + b_i}{2}$ верно, что

$$\frac{T_{(a)} + T_{(b)}}{2} \geqslant T_{(c)}.$$

**(б)** Докажите, что для любых $a, b, c > 0$ таких, что $abc \geqslant 1$, верно, что

$$\frac{a^5 - a^2}{a^5 + b^2 + c^2} + \frac{b^5 - b^2}{b^5 + a^2 + c^2} + \frac{c^5 - c^2}{c^5 + a^2 + b^2} \geqslant 0.$$

# 2 Геометрия

# Двойные отношения

*Двойным отношением* четвёрки точек $A$, $B$, $C$, $D$, лежащих на одной прямой, называется число

$$(A, B; C, D) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}.$$

А именно, это отношение отношений, в которых точки $C$ и $D$ делят отрезок $AB$.

*Двойным отношением прямых* $a$, $b$, $c$, $d$, пересекающихся в одной точке, называется число

$$(a, b; c, d) = \frac{\sin\angle(\vec{a}, \vec{c})}{\sin\angle(\vec{b}, \vec{c})} : \frac{\sin\angle(\vec{a}, \vec{d})}{\sin\angle(\vec{b}, \vec{d})},$$

где $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ — произвольные векторы, направленные вдоль соответствующих прямых, $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ — ориентированный угол (с точностью до $2\pi$).

**Утверждение.** Прямые $a$, $b$, $c$, $d$ пересекаются в одной точке, прямая $\ell$ пересекает их в различных точках $A$, $B$, $C$, $D$ соответственно. Тогда $(a, b; c, d) = (A, B; C, D)$.

Четвёрка точек или прямых называется *гармонической*, если их двойное отношение равно $-1$.

## Теория

**1.** Известно, что $(A, B; C, D) = \lambda$. Найдите $(B, A; C, D)$, $(A, B; D, C)$ и $(A, C; B, D)$. Осознайте, что с помощью этого можно найти двойное отношение для любой перестановки точек.

**2.** Докажите, что следующие четвёрки гармонические:
**(а)** $A$, $B$, $M$, $\infty$, где $M$ — середина отрезка $AB$;
**(б)** $a$, $b$, $c$, $d$, где прямые $c$ и $d$ — внутренняя и внешняя биссектрисы угла между прямыми $a$ и $b$;
**(в)** $B$, $C$, $A_1$, $A_2$, где $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ — чевианы треугольника, пересекающиеся в одной точке, $A_2$ — точка пересечения прямых $B_1C_1$ и $BC$;
**(г)** центры двух окружностей и их центры отрицательной и положительной гомотетии;
**(д)** такие точки $A$, $B$, $C$, $D$, что для середины $M$ отрезка $AB$ выполнено равенство $MA^2 = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$.

**3.** Про точки $A$, $B$, $C$, $D$, $D_1$, лежащие на одной прямой, известно, что $(A, B; C, D) = (A, B; C, D_1)$. Докажите, что $D = D_1$.

**4.** Две прямые пересекаются в точке $P$. На одной прямой выбраны точки $A$, $B$, $C$, а на другой — точки $A_1$, $B_1$, $C_1$. Докажите, что если $(P, A; B, C) = (P, A_1; B_1, C_1)$, то прямые $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ пересекаются в одной точке (возможно, бесконечно удалённой).

**5.** Прямые $a$, $b$, $c$, $d$ пересекаются в одной точке. Докажите, что если $c \perp d$ и $(a, b; c, d) = -1$, то $c$ и $d$ — биссектрисы углов, образованных прямыми $a$ и $b$.

## Задачи

**6.** Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке $R$, продолжения сторон $AB$ и $CD$ — в точке $P$, а продолжения сторон $BC$ и $AD$ — в точке $Q$.
**(а)** Прямая, проходящая через точку $R$, пересекает прямые $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ в точках $M$, $X$, $N$, $Y$. Докажите, что $R$ делит пополам отрезок $MN$ тогда и только тогда, когда $R$ делит пополам отрезок $XY$.
**(б)** Обозначим через $T$ проекцию точки $R$ на прямую $PQ$. Докажите, что противоположные стороны четырёхугольника видны из точки $T$ под равными углами.

**7.** Внутри угла с вершиной $O$ отмечена точка $P$. Рассматриваются всевозможные пары точек $X$ и $Y$ на сторонах угла такие, что $\angle OPX = \angle OPY$. Докажите, что все прямые $XY$ проходят через одну точку.

**8.** В треугольнике $ABC$ проведена биссектриса $AL$ и биссектриса внешнего угла $AN$. Точка $M$ — середина стороны $AC$, $P$ — точка пересечения прямых $AB$ и $ML$. Докажите, что $PA = PN$.

**9.** Пусть $H_a$ и $L_a$ — основание высоты и биссектрисы треугольника $ABC$, проведённых из вершины $A$; вписанная и вневписанная окружности касаются стороны $BC$ в точках $K_a$ и $T_a$ соответственно.
**(а)** Докажите, что $(H_a, L_a; K_a, T_a) = -1$;
**(б)** Пусть $I$ и $I_a$ — центр вписанной и вневписаной окружностей треугольника $ABC$. Докажите, что прямые $H_aI$ и $H_aI_a$ симметричны относительно прямой $BC$.
**(в)** Определим аналогично точки $H_b$, $L_b$, $K_b$, $T_b$. Докажите, что прямые $H_aH_b$, $L_aL_b$, $T_aT_b$, $K_aK_b$ пересекаются в одной точке.

# Двойные отношения. Добавка

**1.** Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Точки $Q$, $A$, $B$, $P$ лежат на одной прямой именно в таком порядке. Прямая $AC$ касается окружности $(ADQ)$, а прямая $BD$ касается окружности $(BCP)$. Точки $M$ и $N$ — середины сторон $BC$ и $AD$ соответственно. Докажите, что следующие касательная к $(ANQ)$ в точке $A$, касательная к $(BMP)$ в точке $B$ пересекаются на прямой $CD$.

**2.** На стороне $BC$ треугольника $ABC$ выбрана точка $D$. Окружности, вписанные в треугольники $ABD$ и $ACD$ касаются отрезка $BC$ в точках $E$ и $F$ соответственно. Линия центров окружностей пересекает отрезок $AD$ в точке $P$. Прямые $BP$ и $CP$ пересекают биссектрисы углов $C$ и $B$ в точках $Y$ и $X$ соответственно. Докажите, что прямые $EX$ и $FY$ пересекаются на вписанной окружности треугольника $ABC$.

**3.** Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности, лучи $BA$ и $CD$ пересекаются в точке $E$, лучи $BC$ и $AD$ — в точке $F$. Вписанная окружность треугольника, образованного прямыми $AB$, $CD$ и биссектрисой угла $B$, касается прямой $AB$ в точке $K$, а вписанная окружность треугольника, образованного прямыми $AD$, $BC$ и биссектрисой угла $B$, касается прямой $BC$ в точке $L$. Докажите, что прямые $KL$, $AC$ и $EF$ пересекаются в одной точке.

**4.** Внутри треугольника $ABC$ на биссектрисе угла $A$ выбрана произвольная точка $J$. Лучи $BJ$ и $CJ$ пересекают стороны $AC$ и $AB$ в точках $K$ и $L$ соответственно. Касательная к окружности $(AKL)$ в точке $A$ пересекает прямую $BC$ в точке $P$. Докажите, что $PA = PJ$.

# Двойные отношения на окружности

**Определение.** *Двойным отношением* $(A, B; C, D)$ различных точек $A$, $B$, $C$, $D$, лежащих на одной окружности, называют величину $(PA, PB; PC, PD)$, где $P$ — произвольная точка той же окружности.

Эта величина не зависит от выбора точки $P$. Точка $P$ может совпадать с одной из точек $A$, $B$, $C$, $D$, тогда соответствующая секущая вырождается в касательную к окружности.

**Пример.** Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ касательные в точках $B$ и $D$ пересекаются на прямой $AC$ тогда и только тогда, когда $(A, C; B, D) = -1$. (Такой четырёхугольник называется *гармоническим*.)

**1.** Биссектриса внутреннего угла при вершине $A$ треугольника $ABC$ пересекает $(ABC)$ в точке $D$, а биссектриса внешнего угла пересекает $BC$ в точке $E$. Симедиана, поведённая из вершины $A$, пересекает $(ABC)$ в точке $L$. Докажите, что $D$, $E$, $L$ лежат на одной прямой.

**2.** В угол $BAC$ вписана окружность $\omega$, касающаяся сторон угла в точках $B$, $C$. Хорда $CD$ окружности $\omega$ параллельна прямой $AB$. Прямая $AD$ второй раз пересекает $\omega$ в точке $E$. Докажите, что прямая $CE$ делит отрезок $AB$ пополам.

**3.** Из точки $P$ к окружности $\omega$ проведены отрезки касательных $PA$ и $PB$, точка $C$ диаметрально противоположна точке $B$. Докажите, что прямая $CP$ делит пополам перпендикуляр, опущенный из $A$ на прямую $BC$.

**4.** Дан треугольник $ABC$ и точка $M$. Прямая, проходящая через $M$, пересекает $AB$, $BC$, $CA$ в $C_1$, $A_1$, $B_1$ соответственно. Прямые $AM$, $BM$, $CM$ пересекают окружность $(ABC)$ в точках $A_2$, $B_2$, $C_2$ соответственно. Докажите, что $A_1A_2$, $B_1B_2$, $C_1C_2$ пересекаются в одной точке, лежащей на $(ABC)$.

**5.** Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность $\Omega$. Касательная к $\Omega$, проведённая в точке $D$, пересекает прямую $AC$ в точке $K$. Прямая, проходящая через $K$, пересекает отрезки $AB$ и $BC$ в точках $P$ и $Q$, а окружность $\omega$ — в точках $X$ и $Y$. Оказалось, что диагональ $BD$ делит пополам отрезок $PQ$. Докажите, что она делит пополам и отрезок $XY$.

**6.** **(а) Теорема о бабочке.** Хорды $AC$ и $BD$ окружности $\omega$ проходят через середину хорды $MN$. Отрезки $AD$ и $BC$ пересекают отрезок $MN$ в точках $X$ и $Y$. Докажите, что $XM = YN$.
**(б) Теорема о двойной бабочке.** На хорде $MN$ окружности $\omega$ отмечены точки $M_1$ и $N_1$ такие, что $MM_1 = NN_1$. Хорда $AC$ проходит через точку $M_1$, а хорда $BD$ — через точку $N_1$. Отрезки $AD$ и $BC$ пересекают $MN$ в точках $X$ и $Y$ соответственно. Докажите, что $XM = YN$.

**7.** Из точки $P$ вне окружности $\omega$ проведены касательные $PX$ и $PY$ и две секущие, пересекающие окружность в точках $A$ и $B$, $C$ и $D$. Докажите, что точки пересечения прямых $AC$ и $BD$, $AD$ и $BC$ лежат на прямой $XY$.

**8.** Окружность проходит через вершины $B$ и $C$ треугольника $ABC$ и повторно пересекает отрезки $AB$ и $AC$ в точках $C_1$ и $B_1$ соответственно. Отрезки $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в точке $P$, прямая $AP$ пересекает отрезок $BC$ в точке $A_1$. Докажите, что окружность $(A_1B_1C_1)$ проходит через середину отрезка $BC$.

# Поляры

**Определение.** Дана окружность $\omega$ с центром $O$ и точка $P$. *Полярой* точки $P$ относительно $\omega$ называется прямая $\ell$, которая проходит через инверсную точку $P'$ перпендикулярно прямой $OP$. Точка $P$ называется *полюсом* прямой $\ell$.

Полюсом бесконечно удалённой прямой будем считать центр окружности. Полюсом прямой $\ell$, проходящей через центр $\omega$ будем считать бесконечно удалённую точку, соответствующему перпендикулярному $\ell$ направлению.

Таким образом, мы задали биекцию между точками и прямыми на проективной плоскости. Замена точек на соответствующие им прямые и наоборот называется *полярным преобразованием.*

- Если точка $P$ лежит вне $\omega$, то её поляра — это прямая $XY$, где $PX$ и $PY$ — касательные к $\omega$.
- Пусть через точки $P$ проведены две секущие, пересекающие окружность в точках $A$ и $B$, $C$ и $D$. Тогда точки пересечения прямых $AC$ и $BD$, $AD$ и $BC$ лежат на поляре точки $P$ относительно $\omega$.
- Через точку $P$ проведена секущая, пересекающая окружность $\omega$ в точках $A$ и $B$, а её поляру — в точке $C$. Тогда $(A, B; C, P) = -1$.
- Если $A$ лежит на поляре $B$, то $B$ лежит на поляре $A$.

**1.** Пусть $A$, $B$, $C$ — точки, $a$, $b$, $c$ — соответствующие им поляры относительно окружности $\omega$. Докажите, что точки $A$, $B$, $C$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда прямые $a$, $b$, $c$ проходят через одну точку.

**2.** С помощью одной линейки постройте касательную к данной окружности, проходящую через данную точку вне окружности.

**3.** **(а)** Какая точка является полюсом биссектрисы внешнего угла треугольника относительно его вписанной окружности?
**(б)** Как известно, основания внешних биссектрис треугольника лежат на одной прямой. Какое утверждение получится после полярного преобразования относительно вписанной окружности?

**4.** Четырёхугольник вписан в окружность с центром $O$. Обозначим точки пересечения противоположных сторон и точку пересечения диагоналей четырехугольника через $P$, $Q$ и $R$. Докажите, что $O$ — ортоцентр треугольника $PQR$.

**5.** **(а)** Вписанная окружность описанного четырёхугольника $ABCD$ касается есть сторон $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ в точках $K$, $L$, $M$, $N$ соответственно. Прямые $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $P$, прямые $AD$ и $BC$ — в точке $Q$, прямые $KL$ и $MN$ — в точке $R$, прямые $KN$ и $LM$ — в точке $S$. Докажите, что $P$, $Q$, $R$, $S$ лежат на одной прямой.

**(б)** Докажите, что в описанном четырёхугольнике точка пересечения диагоналей совпадает с точкой пересечения диагоналей четырёхугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами.

**(в)** Докажите, что во вписанном-описанном четырёхугольнике точка пересечения диагоналей лежит на прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей.

**(г)** Докажите, что все четырёхугольники, одновременно вписанные в окружность $\Omega$ и описанные вокруг окружности $\omega$, имеют общую точку пересечения диагоналей.

**6.** Касательные в точках $A$ и $B$ к описанной окружности треугольника $ABC$ пересекаются в точке $X$, а касательные в точках $A$ и $C$ пересекаются в точке $Y$. Точка $Z$ плоскости такова, что $XZ \parallel AB$ и $YZ \parallel AC$. Докажите, что $ZB = ZC$.

**7.** Вписанная в треугольник $ABC$ окружность касается сторон $BC$, $CA$, $AB$ в точках $A_1$, $B_1$, $C_1$ соответственно, точка $I$ — её центр. Докажите, что медиана, проведённая из вершины $A$, отрезок $B_1C_1$ и прямая $IA_1$ пересекаются в одной точке.

**8.** Через центр вписанной окружности $I$ треугольника $ABC$ провели прямые $\ell_a$, $\ell_b$, $\ell_c$, перпендикулярные биссектрисам $AI$, $BI$, $CI$ соответственно.

**(а)** Докажите, что точки пересечения этих прямых со сторонами $BC$, $AC$, $AB$ соответственно лежат на одной прямой.

**(б)** Некоторая касательная к вписанной окружности пересекает эти прямые в точках $A_1$, $B_1$, $C_1$ соответственно. Докажите, что прямые $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ пересекаются в одной точке.

# Заключительный разнобой

**1.** Дан треугольник $ABC$. Точки $A_1$, $B_1$ и $C_1$ на прямых $BC$, $CA$ и $AB$ соответственно таковы, что $B_1$ и $C_1$ лежат на поляре точки $A_1$ относительно $(ABC)$. Докажите, что $C_1$ лежит на поляре точки $B_1$ относительно $(ABC)$.

**2.** Вписанная окружность касается сторон $AB$, $AC$, $BC$ треугольника $ABC$ в точках $C_1$, $B_1$, $A_1$ соответственно. Точка $H$ — проекция $A_1$ на прямую $B_1C_1$. Докажите, что $HA_1$ — биссектриса угла $BHC$.

**3.** В треугольнике $ABC$ вписанная окружность $\omega$ касается сторон $AB$ и $AC$ в точках $C_1$ и $B_1$. Оказалось, что прямые $BC$, $B_1C_1$ и касательная к $(ABC)$ в точке $A$ пересекаются в одной точке $D$. Докажите, что $D$ лежит на прямой, соединяющей центры $\omega$ и $(ABC)$.

**4.** Диагональ $AC$ описанного четырёхугольника $ABCD$ пересекает его вписанную окружность в точках $X$ и $Y$, точка $M$ — середина $XY$. Докажите, что $\angle BMC = \angle DMC$.

# 3 Комбинаторика

# Выпуклость

**Определение.** Множество точек называется выпуклым, если для любых двух точек, принадлежащих ему, верно, что весь отрезок, соединяющий эти 2 точки, принадлежит этому множеству.

**Утверждение.** Пересечение любого (в том числе и бесконечного!) множества выпуклых множеств является выпуклым множеством.

**Определение.** Выпуклым многоугольником называется многоугольник (т. е. замкнутая несамопересекающаяся ломаная), лежащий в одной полуплоскости относительно любой из прямых, содержащих его стороны.

**Теорема 1.** Многоугольник является выпуклым, если выполнено одно из следующих равносильных утверждений:

- часть плоскости, им ограниченная, является выпуклым множеством;
- он лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону;
- все его внутренние углы меньше $180°$;
- все его диагонали лежат полностью внутри него;
- граница видна полностью из любой его внутренней точки;
- из любой внешней точки он виден под углом, меньшим $180°$.

**Определение.** Выпуклой оболочкой множества точек $A$ называется наименьшее по включению (содержащееся в любом другом) выпуклое множество, содержащее все точки множества $A$.

**Теорема 2.** У множества точек на плоскости существует единственная выпуклая оболочка.

**1.** Докажите индукцией по количеству точек, что выпуклая оболочка конечного множества точек является многоугольником с вершинами в некоторых из этих точек.

**2.** **Теорема Каратеодори для плоскости**. Если точка принадлежит выпуклой оболочке системы из конечного числа точек, то она либо совпадает с одной из точек системы, либо принадлежит отрезку, соединяющему две точки из системы, либо принадлежит треугольнику с вершинами из той же системы.

**3.** На плоскости дано $n$ точек, причём любые четыре из них являются вершинами выпуклого четырёхугольника. Докажите, что эти точки являются вершинами выпуклого $n$-угольника.

**4.** На плоскости даны $2n + 3$ точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой, а никакие четыре не лежат на одной окружности. Докажите, что из этих точек можно выбрать три точки так, что $n$ из оставшихся точек лежат внутри окружности, проведённой через выбранные точки, а $n$ вне.

**5.** Даны $n$ точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Через каждую пару точек проведена прямая. Какое минимальное число попарно непараллельных прямых может быть среди них?

**6.** На столе расположено $n$ картонных и $n$ пластмассовых квадратов, причем никакие два картонных и никакие два пластмассовых квадрата не имеют общих точек, в том числе и точек границы. Оказалось, что множество вершин картонных квадратов совпадает с множеством вершин пластмассовых квадратов. Обязательно ли каждый картонный квадрат совпадает с некоторым пластмассовым?

**7.** **Теорема Минковского для плоскости.** Начало координат является центром симметрии выпуклой фигуры площадью более 4. Докажите, что эта фигура содержит хотя бы одну точку с целыми координатами, отличную от начала координат.

**8.** **(а)** Во всех узлах целочисленной решётки, кроме одного, в котором находится охотник, растут деревья, стволы которых имеют радиус $r$. Докажите, что охотник не сможет увидеть зайца, находящегося от него на расстоянии больше $1/r$.

**(б)** Пусть $n$ — натуральное число. Во всех точках целочисленной решётки, расположенных строго внутри окружности радиуса $\sqrt{n^2+1}$ с центром в начале координат и отличных от начала координат, растут деревья радиуса $r$. Докажите, что если $r < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, то на указанной окружности есть точка, которую можно увидеть из начала координат.

# Теорема Хелли на плоскости

1. **(а)** На плоскости расположены $k \geqslant 4$ точки. Докажите, что их можно разбить на две группы так, чтобы выпуклые оболочки групп пересекались.
**(б) Теорема Хелли.** На плоскости расположено конечное число выпуклых множеств, у любых трёх из которых есть общая точка. Докажите, что у всех множеств есть общая точка.
**(в)** Докажите, что теорема Хелли неверна для бесконечного числа множеств.

2. Дан выпуклый многоугольник. Известно, что для любых трёх его сторон существует такая точка $X$ внутри многоугольника, что проекции точки $X$ на прямые, содержащие эти стороны, попадают на сами стороны, а не на их продолжения. Докажите, что существует точка внутри многоугольника, обладающая тем же свойством относительно всех сторон одновременно.

3. На плоскости отмечено несколько точек. Оказалось, что любые три точки можно покрыть кругом радиуса 1. Докажите, что все точки можно покрыть кругом радиуса 1.

4. На плоскости дано несколько прямых, причем любые три из них можно пересечь кругом радиуса 1. Докажите, что все прямые можно пересечь кругом радиуса 1.

5. Несколько полуплоскостей покрывают всю плоскость. Докажите, что из них можно выбрать не более трёх, которые также покрывают всю плоскость.

6. На окружности отметили несколько дуг длины меньше половины окружности. Известно, что любые три дуги имеют общую точку. Докажите, что все дуги имеют общую точку.

7. **Теорема Юнга.** На плоскости даны несколько точек, причём расстояние между любыми двумя не превосходит 1. Докажите, что все точки можно накрыть кругом радиуса $1/\sqrt{3}$.

8. **Теорема Бляшке.** Про выпуклый многоугольник $M$ известно, что для любой прямой длина отрезка, служащего проекцией многоугольника $M$ на эту прямую, не меньше 1. Докажите, что $M$ заключает внутри себя круг радиуса $1/3$.

9. Дано несколько вертикальных отрезков. Для любых трёх из них найдётся прямая, их пересекающая. Докажите, что найдётся прямая, пересекающая все эти отрезки.

# ЧУМы, цепи и антицепи

В рамках этого листика *частично упорядоченным множеством* будем называть любой ориентированный граф (без петель и кратных стрелок) с конечным числом вершин, в котором выполнено свойство *транзитивности*: для любых трёх вершин $A$, $B$, $C$ если есть стрелки $A \to B$, $B \to C$, то есть стрелка $A \to C$.

*Цепь* — это последовательность $A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_n$ некоторых вершин графа, любые два соседних элемента которой соединены стрелкой. *Антицепь* — набор $\{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ вершин графа, никакие два из которых не соединены стрелкой.

**Теорема Мирского.** В частично упорядоченном множестве число вершин в самой большой цепи равно минимальному количеству антицепей, на которые оно разбивается.

**Теорема Дилуорса.** В частично упорядоченном множестве число вершин в самой большой антицепи равно минимальному количеству цепей, на которые оно разбивается.

**1.** В ящике с пакетами лежит 100 пакетов. Известно, что нет цепочки из 11 последовательно вложенных друг в друга пакетов. Докажите, что все пакеты можно раскрасить в 10 цветов так, чтобы никакие два пакета одного цвета не лежали один внутри другого.

**2.** **(а)** Докажите теорему Мирского.
**(б)** В частичном упорядоченном множестве в самой длинной цепи $n$ вершин, а самой большой антицепи — $m$ вершин. Докажите, что в этом ЧУМе всего не более $nm$ вершин.

**3.** Есть набор из 2025 неравных клетчатых прямоугольников, стороны которых не превосходят 1000 клеток. Докажите, что можно найти пять прямоугольников, которые можно по цепочке засунуть друг в друга.

**4.** Для данных натуральных $r$ и $s$ докажите, что любая последовательность различных вещественных чисел длины $rs+1$ содержит монотонно возрастающую подпоследовательность длины $r+1$ или монотонно убывающую длины $s+1$.

**5.** На прямой нарисованы несколько отрезков. Оказалось, что среди любых $(n+1)$ отрезков какие-то два пересекаются. Докажите, что можно взять $n$ гвоздей и прибить ими все отрезки к прямой.

**6.** Какое наибольшее число шашек можно расставить в клетках таблицы $n \times n$ так, чтобы выполнялось условие: если шашка $A$ находится ниже и правее шашки $B$, то они находятся в соседних по диагонали клетках?

**7.** Вершины графа $G$ невозможно раскрасить правильным образом в 10 цветов, но можно в 11. Докажите, что для любой правильной раскраски вершин графа $G$ в 11 цветов в нём можно найти простой путь из 11 разноцветных вершин.

# Теорема Дилуорса

**Теорема Дилуорса.** В частично упорядоченном множестве число вершин в самой большой антицепи равно минимальному количеству цепей, на которые оно разбивается.

В этом листике доказываем теорему Дилуорса двумя способами: индукцией по числу вершин и через теорему Кёнига.

**1.** (*Доказательство по индукции*) Рассмотрим кукую-то вершину $u$ нашего частично упорядоченного множества $M$, в которую не входит ни одной стрелки. По предположению индукции если $m$ — размер максимальной антицепи в $M \setminus \{u\}$, то тогда $M \setminus \{u\}$ разбивается на $m$ непересекающихся цепей: $M \setminus \{u\} = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_m$. Назовём элемент $x \in M \setminus \{u\}$ *интересным*, если он лежит в какой-нибудь максимальной антицепи множества $M \setminus \{u\}$.
**(а)** Обозначим через $x_i$ наибольший (относительно частичного порядка) интересный элемент цепи $C_i$. Докажите, что $\{x_1, \ldots, x_m\}$ — антицепь.
**(б)** Попытайтесь добавить вершину $u$ к антицепи $\{x_1, \ldots, x_m\}$ и завершите доказательство.

**2.** (*Доказательство через теорему Кёнига о максимальном паросочетании*) Рассмотрим двудольный граф $G$: обе доли — это копии нашего частично упорядоченного множества $M$; если в множестве $M$ была стрелка $A \to B$, то в графе $G$ соединим вершину $A$ левой доли с вершиной $B$ правой доли ребром.
**(а)** Докажите, что размер минимального разбиения множества $M$ на цепи равен разности числа $|M|$ и размера максимального паросочетания в $G$.
**(б)** Докажите, что размер максимальной антицепи в множестве $M$ равен разности числа $|M|$ и размера минимального вершинного покрытия рёбер в $G$. Завершите доказательство.