Двойные отношения

Проективная плоскость

Добавим к обычной плоскости несколько «абстрактных точек» (абстрактных в том смысле, что они не будут лежать на плоскости). Для каждого направления прямых добавим *бесконечно удалённую точку* соответствующую этому направлению и будем считать, что все прямые этого направления проходят через неё. Также будем считать, что все бесконечно удалённые точки лежат на *бесконечно удалённой прямой*. Полученную конструкцию будем называть *проективной плоскостью*.

Главное преимущество проективной плоскости — любые две прямые пересекаются в одной точке. Действительно, возможно три случая.

- Прямые ℓ и m пересекались в обычной точке плоскости. Тогда на проективной плоскости они продолжат пересекаться в этой точке, новых точек пересечения не появится.
- Прямые ℓ и m были параллельны. Тогда на проективной плоскости они будут пересекаться в одной точке — соответствующей их направлению бесконечно удалённой точке.
- Прямая ℓ и бесконечно удалённая прямая. Они пересекаются в одной точке — соответствующей направлению ℓ бесконечно удалённой точке.

Ранее мы уже встречались с пополнением обычной плоскости — при изучении инверсии мы добавляли одну бесконечно удалённую точку и считали, что через неё проходят все прямые. Важно понимать, что эта бесконечно удалённая точка и те бесконечно удалённые точки, которые мы ввели, не имеют ничего общего. Это просто разные пополнения обычной плоскости.

Везде далее мы будем считать, что всё происходит на проективной плоскости.

Напоминание про отношение векторов

Под записью $\frac{\overrightarrow{AX}}{\overrightarrow{BX}}$ мы подразумеваем отношение $\pm\frac{AX}{BX}$, взятое с плюсом, если вектора сонаправлены, и с минусом иначе. Про такое отношение мы знаем, что при фиксированных точках A и B для любого $k \neq 1$ найдётся единственная точка X такая, что $\frac{\overrightarrow{AX}}{\overrightarrow{BX}} = k$.

Доопределим отношение для случая, когда X — бесконечно удалённая точка ∞, соответствующая прямой AB. В этом случае по определению положим

$$\frac{\overrightarrow{A\infty}}{\overrightarrow{B\infty}} = 1.$$

Это хорошо соотносится с интуицией — когда X стремится к бесконечности, отношение $\frac{\overrightarrow{AX}}{\overrightarrow{BX}}$ стремится к 1.

Определения и простейшие свойства

Двойным отношением четвёрки различных точек A, B, C, D, лежащих на одной прямой, называется число

$$(A, B; C, D) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}.$$

Если формулировать словами, то двойное отношение четвёрки A, B, C, D — это отношение отношений, в которых точки C и D делят отрезок AB.

Двойным отношением четвёрки различных прямых a, b, c, d, пересекающихся в одной точке, называется число

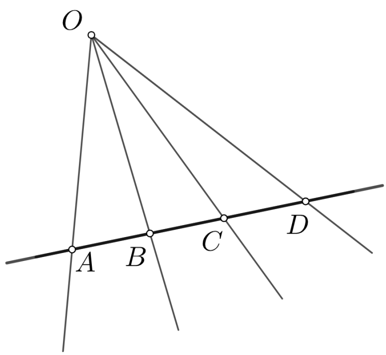
$$(a, b; c, d) = \frac{\sin\angle(\vec{a}, \vec{c})}{\sin\angle(\vec{b}, \vec{c})} : \frac{\sin\angle(\vec{a}, \vec{d})}{\sin\angle(\vec{b}, \vec{d})},$$

где $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ — произвольные векторы, направленные вдоль соответствующих прямых, $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ — ориентированный угол между векторами (то есть угол считающийся против часовой стрелки).

Заметим, что определение двойного отношения прямых не зависит от выбора векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$. Это следует из того, что при замене любого вектора, пусть $\vec{a}$ на $-\vec{a}$, ровно два синуса меняют знак, так как их аргумент меняется на π.

Утверждение 1. *Прямые a, b, c, d пересекаются в одной точке, прямая ℓ пересекает их в различных точках A, B, C, D соответственно. Тогда $(a, b; c, d) = (A, B; C, D)$.*

Доказательство. Пусть среди точек A, B, C, D нет бесконечно удалённой. Докажем отдельно, что у двойных отношений равны модули и равны знаки. Для того, чтобы доказать равенство модулей, заменим отношение отрезков на отношение площадей. Обозначим точку пересечения прямых a, b, c, d через O.



Тогда

$$|(A, B; C, D)| = \left| \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} \right| = \frac{S_{AOC}}{S_{BOC}} : \frac{S_{AOD}}{S_{BOD}}.$$

Распишем каждую площадь по формуле произведения сторон на синус угла между ними, отдельно сгруппируем стороны, отдельно — синусы. Получим

$$\frac{S_{AOC}}{S_{BOC}} : \frac{S_{AOD}}{S_{BOD}} = \left(\frac{OA \cdot OC}{OB \cdot OC} : \frac{OA \cdot OD}{OB \cdot OD}\right) \cdot \left|\frac{\sin\angle(\vec{a}, \vec{c})}{\sin\angle(\vec{b}, \vec{c})} : \frac{\sin\angle(\vec{a}, \vec{d})}{\sin\angle(\vec{b}, \vec{d})}\right| = |(a, b; c, d)|.$$

Таким образом, равенство модулей доказано.

Чтобы доказать равенство знаков, в качестве $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ выберем $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ соответственно. Тогда несложно видеть, что знак отношения $\overrightarrow{AC}/\overrightarrow{BC}$ совпадает со знаком отношения $\sin\angle(\vec{a}, \vec{c})/\sin\angle(\vec{b}, \vec{c})$, аналогично со вторым сомножителем. Таким образом, знаки выражений равны.

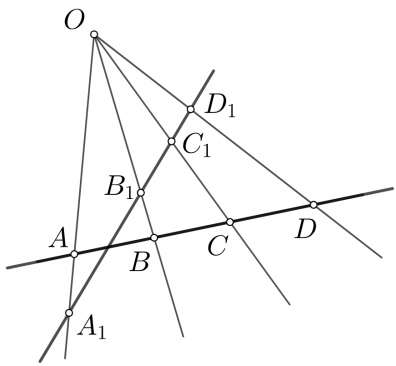
Упражнение. Докажите утверждение, если среди точек A, B, C, D есть бесконечно удалённая.

Указание. Равенство знаков доказывается аналогично. Чтобы доказать равенство модулей, надо так же переписать отношение отрезков в виде отношения площадей, а затем применить теорему синусов. Из параллельности углы треугольника будут равны углам между прямыми четвёрки. $\square$

Важным следствием только что доказанного утверждения является то, что с его помощью можно «перекидывать» отношения с прямой на прямую. А именно, пусть даны прямые ℓ и ℓ_1 и точка O, не лежащая на них. *Центральной проекцией* из точки O с прямой ℓ на прямую ℓ' назовём отображение, которое каждой точке X прямой ℓ ставит в соответствие точку X_1 пересечения прямой OX с ℓ_1.

Следствие. *Двойное отношение сохраняется при центральной проекции.*

Более конкретно, если на прямой ℓ выбраны точки A, B, C, D, которые при центральной проекции из точки O переходят в точки A_1, B_1, C_1, D_1 на прямой ℓ_1, то $(A, B; C, D) = (A_1, B_1; C_1, D_1)$. Иногда для понятности мы будем писать над знаком равенства точку, из которой проецируем, то есть $(A, B; C, D) \overset{O}{=} (A_1, B_1; C_1, D_1)$.



Важным частным случаем являются четвёрки точек, двойное отношение которых равно -1. Такие четвёрки называются *гармоническими*.

Упражнение. Докажите, что следующие четвёрки точек гармонические:

- A, B, M, ∞, где M — середина отрезка AB;
- a, b, c, d, где прямые c и d — внутренняя и внешняя биссектрисы угла между прямыми a и b;
- B, C, A_1, A_2, где AA_1, BB_1, CC_1 — чевианы треугольника, пересекающиеся в одной точке, A_2 — точка пересечения прямых B_1C_1 и BC;
- центры двух окружностей и их центры отрицательной и положительной гомотетии;
- такие точки A, B, C, D, что для середины M отрезка AB выполнено равенство $MA^2 = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$ (иными словами, точки C и D инверсны относительно окружности, построенной на AB как на диаметре).

Полезные леммы

Порядок точек в двойном отношении важен, при перестановке точек оно будет меняться. При решении задач полезно понимать, как именно.

Упражнение. Известно, что $(A, B; C, D) = \lambda$. Найдите $(B, A; C, D)$, $(A, B; D, C)$ и $(A, C; B, D)$. Осознайте, что с помощью этого можно найти двойное отношение для любой перестановки точек.

Указание. Легко видеть, что первые два двойных отношения равны $1/\lambda$. Третье двойное отношение равно $1 - \lambda$. Для доказательства можно ввести на прямой координаты и явным образом записать в них двойные отношения.

В случае гармонических четвёрок замена порядка в парах A и B, C и D не меняет двойного отношения. Более того, верно обратное утверждение.

Лемма 1. Четвёрка точек A, B, C, D такова, что $(A, B; C, D) = (A, B; D, C)$. Тогда она гармоническая.

Доказательство. Пусть $(A, B; C, D) = \lambda$, тогда $(A, B; D, C) = 1/\lambda$. Тогда $\lambda = 1/\lambda$, откуда $\lambda = \pm 1$. Но если $(A, B; C, D) = 1$, то это означает, что точки C и D делят отрезок AB в одинаковых отношениях, то есть совпадают. Мы же считаем, что точки различны. Поэтому $\lambda = -1$.

Лемма 2. *Про точки A, B, C, D, D_1, лежащие на одной прямой, известно, что $(A, B; C, D) = (A, B; C, D_1)$. Тогда $D = D_1$.*

Доказательство. Записав определение, получим

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD_1}}{\overrightarrow{BD_1}} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} = \frac{\overrightarrow{AD_1}}{\overrightarrow{BD_1}}.$$

Но из последнего равенства следует, что точки D и D_1 совпадают. □

Менее формально лемму 2 можно сформулировать так: если заданы три точки и двойное отношение, то четвёртая точка определена однозначно. Отметим, что утверждение верно, если точки, совпадение которых необходимо доказать, стоят не на последнем месте, а на любом другом.

Отметим, что аналогичное утверждение верно и для прямых. Для его доказательства достаточно провести прямую, рассмотреть её точки пересечения и применить лемму 2.

Лемма 3. *Две прямые пересекаются в точке P. На одной прямой выбраны точки A, B, C, а на другой — точки A_1, B_1, C_1. Если $(P, A; B, C) = (P, A_1; B_1, C_1)$, то прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.*

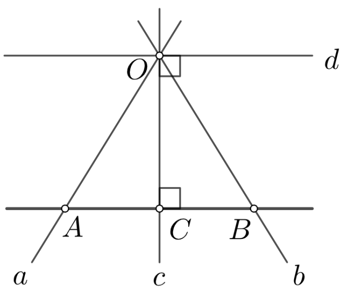
Доказательство. Пусть O — точка пересечения прямых AA_1 и BB_1. Спроецируем четвёрку точек P, A, B, C из точки O на вторую прямую. Получим

$$(P, A; B, C) \overset{O}{=} (P, A_1, B_1, C'),$$

где C' — проекция C. Но по условию $(P, A; B, C) = (P, A_1; B_1, C_1)$. Тогда из леммы 2 следует, что C_1 и C' совпадают. □

Лемма 4. *Прямые a, b, c, d пересекаются в одной точке. Известно, что $c \perp d$ и $(a, b; c, d) = -1$. Тогда c и d — биссектрисы углов, образованных прямыми a и b.*

Доказательство. Обозначим точку пересечения прямых через O. Проведём прямую ℓ, параллельную d и не проходящую через точку O. Пусть она пересекает прямые a, b, c в точках A, B, C соответственно.



Обозначим бесконечно удалённую точку, через которую проходит прямая d через ∞_d. Через эту точку также проходит прямая ℓ. Тогда

$$-1 = (a, b; c, d) = (A, B; C, \infty_d).$$

Но для середины M отрезка AB выполнено равенство

$$(A, B; M, \infty_d) = -1.$$

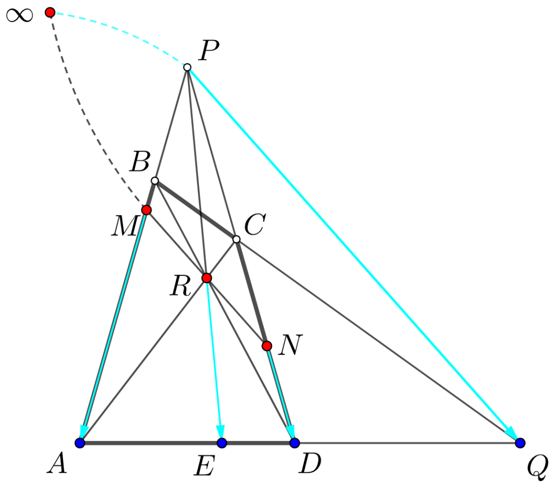
Таким образом, по лемме 2 точки C и M совпадают, то есть C — середина отрезка AB. Тогда в треугольнике OAB отрезок OC — высота и медиана, поэтому она является и биссектрисой. Поскольку $d \perp OC$, то она является внешней биссектрисой треугольника OAB, что и требовалось. □

Примеры

Пример 1. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке R, продолжения сторон AB и CD — в точке P, а продолжения сторон BC и AD — в точке Q. Прямая, проходящая через точку R, пересекает прямые AB, BC, CD, DA в точках M, X, N, Y. Докажите, что R делит пополам отрезок MN тогда и только тогда, когда R делит пополам отрезок XY.

Решение. Докажем, что оба утверждения эквивалентны тому, что проведённая прямая параллельна PQ. Докажем для точек M и N, для точек X и Y рассуждение будет аналогично.

Обозначим бесконечно удалённую точку, соответствующую направлению MN через ∞. Пусть $MN \parallel PQ$. Спроецируем четвёрку $(M, N; R, \infty)$ из точки P на прямую AD.



Получим, что $(M, N; R, \infty) \overset{P}{=} (A, D; E, Q)$. Как известно, $(A, D; E, Q) = -1$, поэтому и исходное двойное отношение равно -1. Получается, что R такова, что дополняет точки M, N, ∞ до гармонической. С одной стороны, середина отрезка MN обладает этим свойством, с другой стороны, по лемме 2 такая точка единственная. Следовательно, R — середина MN.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть R — середина XY. Тогда

$$-1 = (M, N; R, \infty) \overset{P}{=} (A, D; E, Q'),$$

где Q' — точка пересечения прямой AD с прямой, проходящей через P параллельно

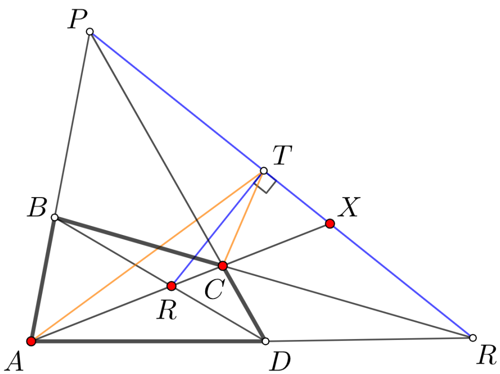
MN. Но как известно, $(A, D; E, Q) = -1$, поэтому из леммы 2 получаем, что Q и Q' совпадают, то есть $PQ \parallel MN$. □

Пример 2. В обозначениях предыдущей задачи пусть T — проекция точки R на прямую PQ. Докажите, что противоположные стороны четырёхугольника видны из точки T под равными углами.

Решение. Докажем, что прямая TR — это биссектриса углов ATC и BTD, из этого будет следовать утверждение задачи.

На картинке есть пара прямых TA и TC и другая пара перпендикулярных прямых TR и TP, про которые нужно доказать, что они являются биссектрисами углов между прямыми AT и CT. Это типичная ситуация, когда надо задуматься о двойных отношениях — если удастся доказать, что четвёрка прямых $(TA, TC; TR, TP)$ гармоническая, то по лемме 4 отсюда будет следовать требуемое.

Чтобы доказать что четвёрка $(TA, TC; TR, TP)$ гармоническая, пересечём их с прямой AC и докажем, что получится гармоническая четвёрка точек. Пусть прямые AC и PR пересекаются в точке X.



Тогда $(TA, TC; TR, TP) = (A, C; R, X)$. Спроецируем эту четвёрку из точки P на прямую AD. Тогда

$$(A, C; R, X) \stackrel{P}{=} (A, D; Y, R),$$

где Y — точка пересечения прямых PR и AD. Но про последнюю четвёрку известно, что она гармоническая. Что мы и хотели доказать. □

Пример 3. Окружность Аполлония. Даны точки A и B и действительное $k > 1$. Докажите, что ГМТ X, для которых $AX/BX = k$ является окружность.

Решение. Как известно, на прямой AB существует ровно две точки, удовлетворяющие условию. Обозначим их через C и D. Докажем, что искомое ГМТ — это окружность ω, построенная на CD как на диаметре.

Доказать, что все точки, удовлетворяющие равенству $AX/BX = k$, лежат на ω, совсем просто — для точки X вне прямой AB по свойству биссектрисы XC и XD будут биссектрисами внутреннего и внешнего угла X в треугольнике XAB, поэтому они перпендикулярны. То есть $\angle AXB = 90^\circ$, откуда X лежит на ω.

Сложная часть задачи — доказать, что все точки ω подходят. Но с помощью двойных отношений это получается совсем легко. Поскольку $AC/BC = AD/BD$ и одна из точек C и D лежит на отрезке AB, а другая — вне, то $(A, B; C, D) = -1$. Тогда для любой точки $X \in \omega$

$$-1 = (A, B; C, D) = (XA, XB; XC, XD),$$

а кроме того, $XC \perp XD$. Тогда по лемме XC и XD — внутренняя и внешняя биссектриса угла X треугольника XAB, откуда получаем требуемое. □

Задачи

1. Внутри угла с вершиной O отмечена точка P. Рассматриваются всевозможные пары точек X и Y на сторонах угла такие, что $\angle OPX = \angle OPY$. Докажите, что все прямые XY проходят через одну точку.

2. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL и биссектриса внешнего угла AN. Точка M — середина стороны AC, P — точка пересечения прямых AB и ML. Докажите, что $PA = PN$.

3. Вписанная окружность касается сторон AB, AC, BC треугольника ABC в точках C_1, B_1, A_1 соответственно. Точка H — проекция A_1 на прямую B_1C_1. Докажите, что HA_1 — биссектриса угла BHC.

4. Пусть H_a и L_a — основание высоты и биссектрисы треугольника ABC, проведённых из вершины A; вписанная и вневписанная окружности касаются стороны BC в точках K_a и T_a соответственно.
   (а) Докажите, что $(H_a, L_a; K_a, T_a) = -1$;
   (б) Пусть I и I_a — центр вписанной и вневписаной окружностей треугольника ABC. Докажите, что прямые H_aI и H_aI_a симметричны относительно прямой BC.
   (в) Определим аналогично точки H_b, L_b, K_b, T_b. Докажите, что прямые H_aH_b, L_aL_b, T_aT_b, K_aK_b пересекаются в одной точке.

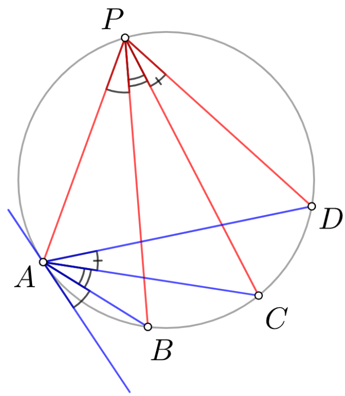
5. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Точки Q, A, B, P лежат на одной прямой именно в таком порядке. Прямая AC касается окружности (ADQ), а прямая BD касается окружности (BCP). Точки M и N — середины сторон BC и AD соответственно. Докажите, что следующие касательная к (ANQ) в точке A, касательная к (BMP) в точке B пересекаются на прямой CD.

6. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D. Окружности, вписанные в треугольники ABD и ACD касаются отрезка BC в точках E и F соответственно. Линия центров окружностей пересекает отрезок AD в точке P. Прямые BP и CP пересекают биссектрисы углов C и B в точках Y и X соответственно. Докажите, что прямые EX и FY пересекаются на вписанной окружности треугольника ABC.

Двойные отношения на окружности

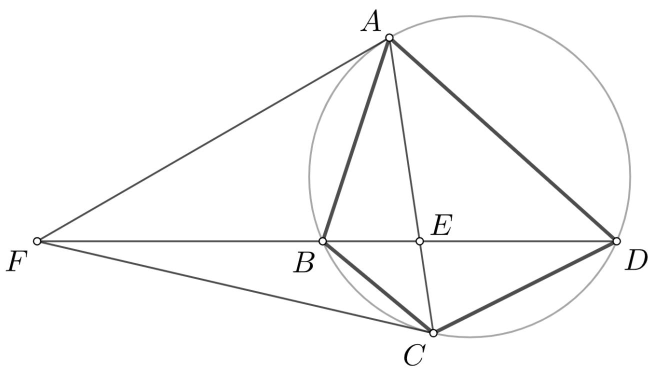
Определение. *Двойным отношением* $(A, B; C, D)$ различных точек A, B, C, D, лежащих на одной окружности, называют величину $(PA, PB; PC, PD)$, где P — произвольная точка той же окружности.

Несложно понять что эта величина не зависит от выбора точки P. Действительно, если точка P движется по окружности, то углы, опирающиеся на хорды либо не меняются, либо угол φ меняется на $180° - \varphi$. Точка P может совпадать с одной из точек A, B, C, D, тогда соответствующая секущая вырождается в касательную к окружности.



Это соображение позволяет проецировать точки с окружности на прямую и наоборот из точки на окружности.

Пример 4. Рассмотрим гармонический четырёхугольник $ABCD$. Пусть его диагонали пересекаются в точке E, а касательные в точках A и C — в точке F. Как известно, в гармоническом четырёхугольнике F лежит на прямой BD.



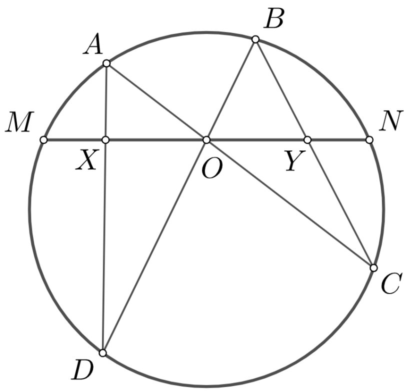
Спроецируем четвёрку $(A, C; B, D)$ на прямую D из точек A и C. Получим

$$(F, E; B, D) \stackrel{A}{=} (A, C; B, D) \stackrel{C}{=} (E, F; B, D).$$

Первая и последняя четвёрка точек отличаются перестановкой первых двух точек. По лемме 1 получаем, что эта четвёрка гармоническая. Таким образом, вершины гармонического четырёхугольника образуют гармоническую четвёрку. □

Пример 5. Теорема о бабочке. Хорды AC и BD окружности ω проходят через середину хорды MN. Отрезки AD и BC пересекают отрезок MN в точках X и Y. Докажите, что $XM = YN$.

Решение. Идея решения состоит в том, чтобы выбрать на прямой MN четвёрку точек и через окружность спроецировать её обратно на прямую MN. Полученное равенство двойных отношений даст соотношение на длины отрезков, из которого и будет следовать необходимое равенство.



Выберем в качестве начальной четвёрки точки M и N, точку, которая делит отрезок MN понятным образом (точку O — середину MN) и одну из точек, про которые мы хотим понять отношение (точку X). Тогда

$$(M, N; O, X) \overset{A}{=} (M, N; C, D) \overset{B}{=} (M, N; Y, O).$$

Завершить доказательство можно двумя способами. Во-первых, можно расписать двойные отношения по определению. Получим

$$(M, N; O, X) = (M, N; Y, O) \;\Leftrightarrow\; \frac{\overrightarrow{MO}}{\overrightarrow{NO}} : \frac{\overrightarrow{MX}}{\overrightarrow{NX}} = \frac{\overrightarrow{MY}}{\overrightarrow{NY}} : \frac{\overrightarrow{MO}}{\overrightarrow{NO}} \;\Leftrightarrow\; \frac{\overrightarrow{NX}}{\overrightarrow{MX}} = \frac{\overrightarrow{MY}}{\overrightarrow{NY}}.$$

Последнее равенство означает, что точка X делит отрезок NM в том же отношении, что и точка Y делит отрезок MN. Но тогда точки X и Y расположены на отрезках соответствующе, то есть $MX = NY$.

Второй способ завершить доказательства — свести к лемме 3. В четвёрке $(M, N; Y, O)$ заменим каждую точку на точку, симметричную ей относительно точки O. Двойное отношение при этом не изменится, поэтому

$$(M, N; Y, O) = (N, M; Y', O),$$

где Y' — точка, симметричная Y относительно O. Но $(N, M; Y', O) = (M, N; O, Y')$. Получим, что $(M, N; O, Y') = (M, N; O, X)$, откуда точки X и Y' совпадают, что и требовалось.

Отметим, что утверждение верно и для пересечения прямых AB и CD с прямой MN, доказательство полностью аналогично. □

Двойные отношения и инверсия

Пусть мы хотим сделать инверсию на проективной плоскости. Возникает вопрос, во что переходит центр инверсии и бесконечно удалённые точки. Есть соблазн сказать, что центр инверсии переходит в бесконечно удалённую прямую, но это плохо — теряется биективность отображения (и, например, тогда получается, что окружность, проходящая через центр инверсии, перейдёт в объединение прямой и бесконечно удалённой прямой).

Правильное восприятие такое: мы просто переходим от одного пополнения плоскости к другому. А именно, мы забываем про бесконечно удалённую прямую и добавляем бесконечно удалённую точку. Затем делаем инверсию, убираем бесконечно удалённую точку и добавляем обратно бесконечно удалённую прямую.

Важное свойство инверсии — она сохраняет двойные отношения. Проще всего это доказать, если ввести комплексные координаты и записать двойное отношение и инверсию с их использованием. Мы же приведём геометрическое доказательство.

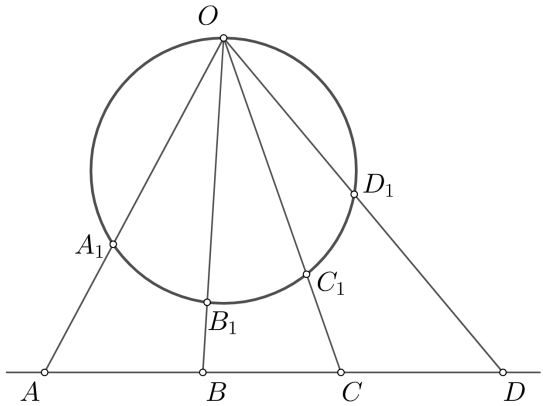
Утверждение. *Точки A, B, C, D лежат на обобщённой окружности. При инверсии, центр которой отличен от этих точек, они перешли в точки A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Тогда $(A, B; C, D) = (A_1, B_1; C_1, D_1)$.*

Доказательство. Обозначим центр инверсии через O. Пусть точки A, B, C, D лежат на прямой, и O также лежит на этой прямой. Тогда достаточно ввести на прямой координаты и явным вычислением показать, что двойное отношение сохранится.

Упражнение. Проделайте это.

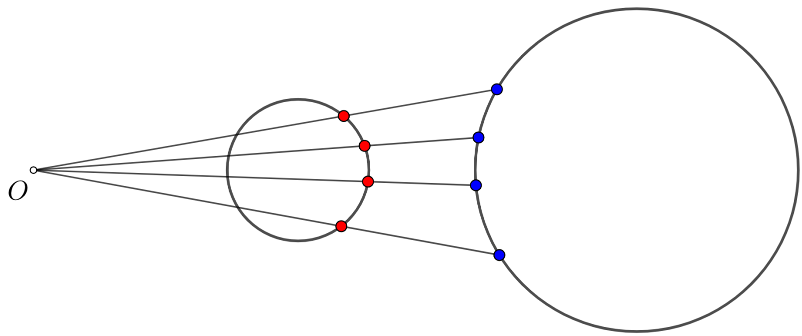
Пусть точки A, B, C, D лежат на прямой, и O не лежит на этой прямой. Тогда

$$(A, B; C, D) = (OA, OB; OC, OD) = (A_1, B_1; C_1, D_1).$$



Пусть точки A, B, C, D лежат на окружности, и O лежит на этой окружности. Этот случай полностью аналогичен предыдущему.

Пусть точки A, B, C, D лежат на окружности, и O не лежит на этой окружности.



Покажем, что модули двойных отношений совпадают. Двойное отношение точек на окружности — это двойное отношение прямых, то есть произведение отношений синусов. Отношение синусов пропорционально отношению длин хорд, на которые опираются соответствующие углы (если «забыть» про знак). Поэтому двойное отношение четырёх точек можно переписать как произведение отношений отрезков. Известно, как меняется длина отрезка при инверсии:

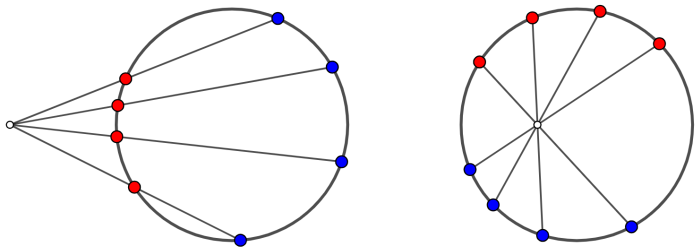
$$A_1B_1 = AB \cdot \frac{R^2}{OA \cdot OB}.$$

Несложно видеть, что если подставить эти выражение в формулу для двойного отношения $(A_1, B_1; C_1, D_1)$, то после сокращения получится формула для $(A, B; C, D)$.

Знаки двойных отношений совпадают, поскольку порядок точек при обходе либо сохраняется, либо меняется на противоположный. $\square$

Замечание. Если центр инверсии совпадает с одной из точек, пусть A, то утверждение тоже верно, только вместо A_1 нужно записать бесконечно удалённую точку (ещё раз подчеркнём, что неверно, что A переходит в бесконечно удалённую точку). Если точки лежат на одной прямой, это так же легко проверить в координатах. Если точки лежат на одной окружности, то касательная в точке A будет параллельна прямой, в которую перейдёт окружность после инверсии, поэтому четвёрка A, B, C, D переходит в четвёрку ∞, B_1, C_1, D_1 проекцией из точки A, поэтому их двойные отношения равны.

Из доказанного утверждения следует, что двойное отношение сохраняется при проекции с окружности на себя: если через точку P проведены четыре секущие, пересекающие окружность ω в точках A и A_1, B и B_1, C и C_1, D и D_1, то $(A, B; C, D) = (A_1, B_1; C_1, D_1)$ (но оно не обязательно равно двойному отношению прямых PA, PB, PC, PD). Для доказательства этого факта достаточно рассмотреть инверсию (и её композицию с центральной симметрией, если точка лежит внутри ω), которая переводит окружность в себя.



Задачи

7. Биссектриса внутреннего угла при вершине A треугольника ABC пересекает (ABC) в точке D, а биссектриса внешнего угла пересекает BC в точке E. Симедиана, поведённая из вершины A, пересекает (ABC) в точке L. Докажите, что D, E, L лежат на одной прямой.

8. Окружности ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 касаются друг друга внешним образом по циклу. Окружность ω касается их всех внешним образом в точках X_1, X_2, X_3, X_4 соответственно. Докажите, что $X_1X_2X_3X_4$ образуют гармонический четырехугольник.

9. Дан треугольник ABC и точка M. Прямая, проходящая через M, пересекает AB, BC, CA в C_1, A_1, B_1 соответственно. Прямые AM, BM, CM пересекают окружность (ABC) в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Докажите, что A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке, лежащей на (ABC).

10. **Теорема о двойной бабочке.** На хорде MN окружности ω отмечены точки M_1 и N_1 такие, что $MM_1 = NN_1$. Хорда AC проходит через точку M_1, а хорда BD — через точку N_1. Отрезки AD и BC пересекают MN в точках X и Y соответственно. Докажите, что $XM = YN$.

11. Из точки P вне окружности ω проведены касательные PX и PY и две секущие, пересекающие окружность в точках A и B, C и D. Докажите, что точки пересечения прямых AC и BD, AD и BC лежат на прямой XY.

12. Точки D и E — проекции вершин B и C на биссектрису угла A треугольника ABC. Окружность, построенная на DE как на диаметре, пересекает сторону BC в точках X и Y. Докажите, что $\angle BAX = \angle CAY$.

13. Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и повторно пересекает отрезки AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке P, прямая AP пересекает отрезок BC в точке A_1. Докажите, что окружность $(A_1B_1C_1)$ проходит через середину отрезка BC.