Геометрия напоследок

1. В треугольнике ABC высоты AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H. Докажите, что середины отрезков BB_1 и CC_1, точки H и A_1 лежат на одной окружности.

2. **Окружность Конвея.** Дан треугольник ABC. Точки A_1 и A_2 лежат на лучах BA и CA за точкой A так, что $AA_1 = AA_2 = BC$. Аналогично определяются точки B_1, B_2, C_1, C_2. Докажите, что точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 лежат на одной окружности. Какая точка является центром окружности?

3. **(а)** Через точку Лемуана L треугольника провели три отрезка, антипараллельных его сторонам. Докажите, что концы этих отрезков лежат на одной окружности.
(б) Через точку Лемуана треугольника провели три отрезка, параллельных его сторонам. Докажите, что концы этих отрезков лежат на одной окружности.
(в) Докажите, что центр окружности из предыдущего пункта — это середина отрезка OL, где O — центр (ABC).

4. **(а)** **Окружность Тэйлора.** Из оснований высот треугольника ABC опущены перпендикуляры на прямые, содержащие две другие стороны. Докажите, что 6 полученных точек лежат на одной окружности.
(б) Докажите, что центр окружности Тэйлора является серединой отрезка, соединяющего центр (ABC) с ортоцентром ортотреугольника.

5. Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Внутри треугольника выбрана точка P. Прямые AP, BP, CP пересекают окружность (ABC) в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что окружность, проходящая через точки, симметричные A_1, B_1, C_1 относительно
(а) соответствующих сторон треугольника;
(б) середин соответствующих сторон треугольника,
проходит через ортоцентр треугольника ABC.