Отборочная олимпиада

1. В клетках квадрата 10×10 расставлены натуральные числа от 1 до 100, каждое по одному разу. Антон рассмотрел всевозможные квадраты площади, большей 1, со сторонами, идущими по линиям сетки, и в каждом покрасил в красный цвет наибольшее число (при этом одно число могло быть покрашено несколько раз). Могло ли так оказаться, что все двузначные числа покрашены в красный цвет?

2. На доску выписаны дроби

$$\frac{1}{n},\ \frac{2}{n-1},\ \frac{3}{n-2},\ \ldots,\ \frac{n}{1},$$

где n — натуральное число. При всяком ли натуральном n, большем 100, из дробей можно выбрать две пары дробей с одинаковыми суммами?

3. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Прямая, перпендикулярная BC и проходящая через точку B, пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке E. Через точку E проведена прямая, параллельная BC и пересекающая AB и AC в точках F и G, соответственно. Окружность, описанная около треугольника EBF, пересекает второй раз отрезок BC в точке O. Докажите, что O — центр описанной окружности треугольника EGC.

4. Дано вещественное $x > 1$. Известно, что $[x^2], [x^3], [x^4]$ — полные квадраты. Докажите, что $[x]$ также является полным квадратом.

5. Вдоль окружности расположено n монет, каждая лежит орлом или решкой вверх. Если две соседние монеты лежат одинаково (обе орлом или обе решкой), разрешается обе перевернуть. Сколько имеется вариантов расположения монет, которые нельзя получить друг из друга, применяя такие операции?

6. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, A_1, B_1, C_1 — основания высот. На прямых OA_1, OB_1, OC_1 выбраны такие точки A', B', C', соответственно, что четырехугольники $AOBC'$, $BOCA'$, $COAB'$ вписанные. Докажите, что окружности, описанные около треугольников AA_1A', BB_1B', CC_1C', имеют общую точку.