Отборочная олимпиада. Решения

Задача 1. В клетках квадрата 10×10 расставлены натуральные числа от 1 до 100, каждое по одному разу. Антон рассмотрел всевозможные квадраты площади, большей 1, со сторонами, идущими по линиям сетки, и в каждом покрасил в красный цвет наибольшее число (при этом одно число могло быть покрашено несколько раз). Могло ли так оказаться, что все двузначные числа покрашены в красный цвет?

Ответ: нет.

Решение. Рассмотрим произвольное красное число n и квадрат A, в котором это число наибольшее. Внутри квадрата A есть квадрат B размера 2×2, содержащий n. Тогда n — наибольшее число в квадрате B. Следовательно, если число наибольшее в каком-то неединичном квадрате, то оно наибольшее и в квадрате 2×2.

Поскольку в каждом квадрате 2×2 наибольшее число одно, то каждому красному числу соответствует свой квадрат 2×2. Таким образом, количество красных чисел не превосходит количества квадратов 2×2. Но квадратов 2×2 всего 81, а двузначных чисел 90. Значит, не все двузначные числа являются красными. $\square$

Задача 2. На доску выписаны дроби

$$\frac{1}{n},\ \frac{2}{n-1},\ \frac{3}{n-2},\ \ldots,\ \frac{n}{1},$$

где n — натуральное число. При всяком ли натуральном n, большем 100, из дробей можно выбрать две пары дробей с одинаковыми суммами?

Ответ: да.

Решение. Пусть для $1 \leqslant a, b, c, d \leqslant n$ выполнено равенство

$$\frac{a+1}{n-a} + \frac{b+1}{n-b} = \frac{c+1}{n-c} + \frac{d+1}{n-d}.$$

Добавим к каждой дроби 1 и разделим на $n+1$

$$\frac{1}{n-a} + \frac{1}{n-b} = \frac{1}{n-c} + \frac{1}{n-d}.$$

В силу равенства $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$ подойдут числа

$$a = n - 4,\ b = n - 6,\ c = n - 3,\ d = n - 12.$$

□

Задача 3. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Прямая, перпендикулярная BC и проходящая через точку B, пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке E. Через точку E проведена прямая, параллельная BC и пересекающая AB и AC в точках F и G, соответственно. Окружность, описанная около треугольника EBF, пересекает второй раз отрезок BC в точке O. Докажите, что O — центр описанной окружности треугольника EGC.

Решение. Прямая FG параллельна BC, поэтому отсекает от треугольника ABC равнобедренный треугольник AFG. Четырёхугольник $EBCA$ вписанный и $\angle EBC = 90°$, поэтому $\angle EAC = 90°$. Тогда треугольник EAG прямоугольный, причём так как $AF = FG$, то AF — медиана этого треугольника, то есть $FG = FE$.

Четырёхугольник $EBOF$ вписанный и $\angle OBE = \angle FEB = 90°$. Значит, это прямоугольник и $EF = BO$, $BF = EO$. Отрезки FG и BO равны и параллельны, поэтому $BOGF$ — параллелограмм. Следовательно, $OG = BF = EO$ и отрезок OG параллелен AB. Тогда треугольник GOC равнобедренный, откуда $OG = OC$.

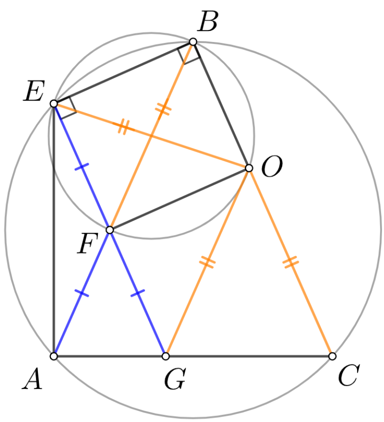

Рис. 1: к задаче 3

Таким образом, $EO = GO = CO$, то есть точка O — центр описанной окружности EGC.

□

Задача 4. Дано вещественное число $x > 1$. Известно, что $[x^2], [x^3], [x^4]$ — полные квадраты. Докажите, что $[x]$ так же является полным квадратом.

Решение. Пусть $[x^2] = n^2$. Тогда $n^2 \leqslant x^2 < n^2 + 1$. Очевидно, что $x < n + 1$, так как иначе $x^2 \geqslant (n+1)^2 > n^2 + 1$, и $x \geqslant n$. Значит, $[x] = n$.

Из оценки на x^2 легко получить оценку на x^4:

$$(n^2)^2 \leqslant x^4 < (n^2 + 1)^2.$$

Но x^4 должен быть полным квадратом, следовательно,

$$[x^4] = n^4 \quad \text{и} \quad n^4 \leqslant x^4 < n^4 + 1.$$

Оценим x^3:

$$n^3 \leqslant x^3 = \frac{x^4}{x} < \frac{n^4+1}{x} \leqslant \frac{n^4+1}{n} < n^3 + 1.$$

Тогда $[x^3] = n^3$, то есть n^3 — полный квадрат. Значит, и $n = [x]$ тоже полный квадрат. $\square$

Задача 5. Вдоль окружности расположено n монет, каждая лежит орлом или решкой вверх. Если две соседние монеты лежат одинаково (обе орлом или обе решкой), разрешается обе перевернуть. Сколько имеется вариантов расположения монет, которые нельзя получить друг из друга, применяя такие операции?

Ответ: 2 варианта, если n нечётно; $n + 1$ вариант, если n чётно.

Решение. Разберем отдельно случаи нечётного и чётного n.

Пусть n нечётно. Покажем, что все монеты можно одинаково ориентировать. Разобьём монеты на группы подряд идущих монет, имеющих одинаковую ориентацию. Если групп хотя бы две, то они чередуются, поэтому их чётное количество. Следовательно, хотя бы в одной группе чётное число монет. Перевернём все монеты этой группы, количество групп уменьшится. Последовательно уменьшая число групп такими действиями, мы можем сделать всего одну группу и, значит, повернуть все монеты одинаково.

Таким образом, есть не более двух вариантов расположения монет, которые нельзя получить друг из друга. Поскольку операция не меняет чётность числа орлов, расположение со всеми орлами нельзя перевести в расположение со всеми решками. Поэтому вариантов расположения ровно два.

Пусть n чётно. Научимся переводить расположения монет в конфигурацию как можно более простого вида, а затем посчитаем количество таких простых конфигураций, которые нельзя получить друг из друга. Отметим на окружности точку возле любой из монет. Разобьём монеты на группы подряд идущих монет, имеющих одинаковую ориентацию. Будем переворачивать группы, в которых чётное число монет, до тех пор, пока такие группы не исчезнут или не останется ровно одна группа. Если осталось несколько групп, то они все нечётны. Отметим, что если в какой-то группе есть хотя бы три монеты, то две из них можно перекинуть в соседнюю группу:

$$\ldots OP[OO]O\ldots \to \ldots OPPPO\ldots$$

Таким образом, всё сведём к конфигурации, в которой есть одна большая группа, а остальные монеты чередуются. Более того, можно считать, что первая монета большой группы находится возле отмеченной точки. Таким образом, конфигурации различаются лишь количеством монет в большой группе и их ориентацией. Если группа ровно одна, то ориентация не имеет значения, поскольку все монеты можно перевернуть.

Покажем, что все остальные конфигурации нельзя получить друг из друга. Действительно, наша операция не меняет разность количества орлов на чётных местах и количества орлов на нечётных местах. Когда большая группа состоит из одного орла, то есть когда все орлы стоят на нечётных местах, а решки на чётных, эта разность равна $\frac{n}{2}$. Увеличение количества орлов в большой группе уменьшает эту разность на 1, поэтому все разности от 0 до $\frac{n}{2}$ возможны. Аналогично, когда большая группа состоит из решек получатся разности от -1 до $-\frac{n}{2}$. Итого получаем $n+1$ различную конфигурацию. $\square$

Задача 6. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, A_1, B_1, C_1 — основания высот. На прямых OA_1, OB_1, OC_1 выбраны такие точки A', B', C', соответственно, что четырехугольники $AOBC'$, $BOCA'$, $COAB'$ вписанные. Докажите, что окружности, описанные около треугольников AA_1A', BB_1B', CC_1C', имеют общую точку.

Решение. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Тогда

$$AH \cdot HA_1 = BH \cdot HB_1 = CH \cdot CH_1\,,$$

то есть степени точки H относительно окружностей AA_1A', BB_1B', CC_1C' равны, причём H лежит внутри этих окружностей.

С другой стороны, $\angle BA'O = \angle BCO = \angle OBC$, то есть треугольники $OA'B$ и OBA_1 подобны и $OA_1 \cdot OA' = OB^2$. Следовательно, степени точки O отно-

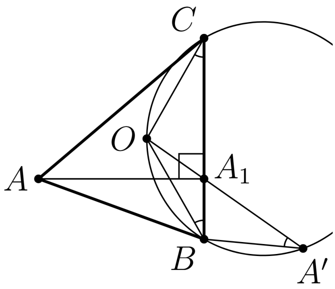

Рис. 2: к задаче 6

сительно всех трёх окружностей также равны, поэтому OH — общая радикальная ось трёх окружностей. Тогда эти окружности пересекаются в двух точках, лежащих на прямой OH. $\square$