Барицентрические координаты, прямые (предварительная версия)

1. Барицентрические координаты точек

Пусть фиксирован треугольник ABC. *Барицентрическими координатами* точки P называется тройка чисел $(x_p : y_p : z_p)$ такая, что точка P является центром масс системы $(A, x_p), (B, y_p), (C, z_p)$.

Для фиксированной точки P эти координаты определены с точностью до пропорциональности, то есть их можно домножить на любое ненулевое число, и они останутся барицентрическими координатами той же точки. Будем называть барицентрические координаты точки *нормированными*, если $x_p + y_p + z_p = 1$.

Напомним, что если сумма масс не равна 0, то центр масс системы существует и единственен, то есть любая тройка с ненулевой массой задаёт какую-то точку. Но тройки с нулевой суммой масс всё же имеют смысл — в разделе 4 мы покажем, что их можно сопоставить бесконечно удалённые точки. Исключение составляет тройка $(0 : 0 : 0)$, её мы рассматривать вообще не будем.

Примеры

1. *Точка пересечения медиан M.* Положим во все вершины треугольника массы 1. Массы из вершин B и C группируются в середину стороны BC, поэтому центр масс системы лежит на медиане, проведённой из вершины A. Аналогично центр масс лежит двух других медианах, поэтому совпадает с точкой M. Таким образом, координаты точки M — $(1 : 1 : 1)$.

2. *Точка пересечения биссектрис I.* Положим в вершину A массу a, массы в вершинах B и C обозначим через y и z. Пусть B_1 и C_1 — основания биссектрис углов B и C соответственно. Центр масс лежит на BB_1 тогда и только тогда, когда массы из вершин A и C группируются в точку B_1. По правилу рычага

$$a \cdot \overrightarrow{B_1A} + z \cdot \overrightarrow{B_1C} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB_1} : \overrightarrow{B_1C} = z : a.$$

   Так как BB_1 — биссектриса, то $\overrightarrow{AB_1} : \overrightarrow{B_1C} = c : a$, поэтому $z = c$. Аналогично $y = b$. Таким образом, координаты точки I — $(a : b : c)$.

В обоих примерах мы нашли барицентрические координаты точки, исходя из того, в каких отношениях делят стороны чевианы, проведённые через эту точку. Доказательство, что каждая точка имеет барицентрические координаты, устроено похожим образом. Единственное отличие — прямая через вершину и точку может быть параллельна стороне.

[1] Я благодарен Фёдору Бахареву за помощь с материалами и за то, что научил меня считать в барицентрических координатах

Утверждение. *У любой точки плоскости существуют барицентрические координаты.*

Доказательство. Выберем произвольную точку P. Если P лежит на прямой BC, то поместим в вершину A массу 0, а в вершины B и C такие массы y_p и z_p, чтобы было выполнено правило рычага:

$$y_p \cdot \overrightarrow{PB} + z_p \cdot \overrightarrow{PC} = 0 \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{BP} : \overrightarrow{PC} = z_p : y_p$$

(в последнем равенстве мы считаем, что если $\overrightarrow{PC} = 0$, то и $y_p = 0$, и наоборот). Далее будем считать, что P не лежит на прямой BC.

Пусть прямая BP пересекает прямую AC в точке B_1. Центр масс лежит на прямой BB_1 тогда и только тогда, когда массы из вершин A и C группируются в точку B_1. По правилу рычага

$$x_p \cdot \overrightarrow{B_1A} + z_p \cdot \overrightarrow{B_1C} = 0 \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{AB_1} : \overrightarrow{B_1C} = z_p : x_p.$$

Пусть прямая BP параллельна AC. Центр масс лежит на прямой, проходящей через B параллельно AC, тогда и только тогда, когда $x_p + z_p = 0$. Действительно, если $x_p + z_p \neq 0$, то массы x_p и z_p группируются в некоторую точку X на прямой AC и центр масс лежал бы на прямой BX, которая отлична от прямой BP, противоречие. Следовательно, $x_p + z_p = 0$ или $z_p : x_p = -1$.

Таким образом, мы определили при каком отношении $z_p : x_p$ центр масс всей системы будет лежать на прямой BP. Аналогично найдём, при каком отношении $y_p : x_p$ центр масс будет лежать на прямой CP. Положим $x_p = 1$, y_p и z_p определим из найденных отношений — это и будут барицентрические координаты точки P. □

Замечание. В качестве барицентрических координат P подойдёт тройка

$$(S(P,BC) : S(P,AC) : S(P,AB)),$$

где $S(P,BC)$ — это ориентированная площадь треугольника PBC, то есть площадь треугольника PBC, взятая со знаком «+», если P и A лежат в одной полуплоскости относительно BC, и со знаком «−», если в разных; $S(P,AB)$ и $S(P,AC)$ определяются аналогично.

Чтобы это доказать, заметим, что $z_p : x_p = S(P,AB) : S(P,BC)$. Действительно, если BP пересекается с AC, то в обозначениях доказательства выполнено

$$z_p : x_p = \overrightarrow{AB_1} : \overrightarrow{B_1C} = S(P,AB) : S(P,BC).$$

Если $BP \parallel AC$, то также $S(P,AB) : S(P,BC) = -1 = z_p : x_p$. Аналогично $S(P,AC) : S(P,BC) = y_p : x_p$. Поместив в вершину A массу $S(P,BC)$, получим требуемое.

Задачи

1. Докажите формулы для барицентрических координат указанных точек:
   (a) центр вневписанной окружности I_a — $(-a : b : c)$;

(б) точка Нагеля N — $(p-a : p-b : p-c)$;

(в) точка Жергонна G — $\left(\frac{1}{p-a} : \frac{1}{p-b} : \frac{1}{p-c}\right)$;

(г) ортоцентр H — $(\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\gamma)$;

(д) центр O описанной окружности — $(\sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma)$;

(е) точка D такая, что $ABDC$ параллелограмм — $(-1 : 1 : 1)$.

2. **(а)** Докажите, что точки с барицентрическими координатами $(x_0 : y_0 : z_0)$ и $\left(\frac{a^2}{x_0} : \frac{b^2}{y_0} : \frac{c^2}{z_0}\right)$ изогонально сопряжены.

(б) Докажите, что точка пересечения касательных к (ABC) в точках B и C имеет координаты $(-a^2 : b^2 : c^2)$.

3. **Нотация Конвея.** Для произвольного угла θ обозначим $S_\theta = 2S\operatorname{ctg}\theta$, где S — площадь треугольника. Для θ, равных углам треугольника ABC, будем обозначать соответствующие величины через S_A, S_B и S_C.

Иногда бывает удобно выразить координаты точек H и O через длины сторон треугольника, и введённые обозначения помогают это сделать.

(а) Докажите, что

$$S_A = \overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2},$$

где C_1 — основание высоты из вершины C.

(б) Докажите, что H имеет барицентрические координаты

$$\left(\frac{1}{S_A} : \frac{1}{S_B} : \frac{1}{S_C}\right) = (S_BS_C : S_AS_C : S_AS_B),$$

а O имеет барицентрические координаты

$$\left(a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C\right) = (S_A(S_B+S_C) : S_B(S_A+S_C) : S_C(S_A+S_B)).$$

(в) Пусть P — такая точка плоскости, что $\measuredangle PBC = \varphi$, $\measuredangle BCP = \psi$ (углы направленные). Докажите, что P имеет барицентрические координаты

$$(-a^2 : S_C + S_\psi : S_B + S_\varphi).$$

2. Три точки на одной прямой

Утверждение. *Точки P, Q, R лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда барицентрические координаты одной из точек — это линейная комбинация барицентрических координат двух других точек.*

Доказательство. Понятно, что если если утверждение верно для нормированных координат, то оно верно и для любых других координат, поэтому далее будем считать, что координаты нормированные.

Пусть точки P, Q, R лежат на одной прямой. Тогда найдётся такое $\alpha \in \mathbb{R}$, что для любой точки O было выполнено равенство

$$\alpha\overrightarrow{OP} + (1-\alpha)\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR}.$$

В частности, для $O = R$ выполнено

$$\alpha\overrightarrow{RP} + (1-\alpha)\overrightarrow{RQ} = 0. \tag{1}$$

Поместим в вершину A массы αx_p и $(1-\alpha)x_q$, в вершины B и C — аналогичные. Первые из них группируются в точку P (и в ней будет масса α), а вторые — в точку Q (и в ней будет масса $1-\alpha$). Тогда из (1) точка R — центр масс всей системы. Таким образом, R имеет барицентрические координаты

$$(x_r : y_r : z_r) = (\alpha x_p + (1-\alpha)x_q : \alpha y_p + (1-\alpha)y_q : \alpha z_p + (1-\alpha)z_q) =$$

$$= \alpha(x_p : y_p : z_p) + (1-\alpha)(x_q : y_q : z_q),$$

что и требовалось.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть найдётся такое $\alpha \in \mathbb{R}$, что

$$(x_r : y_r : z_r) = \alpha(x_p : y_p : z_p) + (1-\alpha)(x_q : y_q : z_q)$$

(сумма коэффициентов равна 1, потому что координаты нормированные). По определению барицентрических координат, если положить в вершины A, B, C массы x_r, y_r, z_r, то центр масс будет расположен в точке P. Разобьём массу x_r на αx_p и $(1-\alpha)x_q$, аналогично разобьём y_r и z_r. Первые массы группируются в точку P, вторые — в точку Q. Тогда центр масс всей системы лежит на прямой PQ, то есть R лежит на PQ, что и требовалось. □

Замечание. Из доказательства теоремы следует, что если для нормированных барицентрических координат выполнено соотношение

$$(x_r : y_r : z_r) = \alpha(x_p : y_p : z_p) + (1-\alpha)(x_q : y_q : z_q),$$

то $\alpha\overrightarrow{RP} + (1-\alpha)\overrightarrow{RQ} = 0$, откуда $\overrightarrow{PR} : \overrightarrow{RQ} = (1-\alpha) : \alpha$, то есть можно понять, в каком отношении точка R делит отрезок PQ. Понятно, что требование нормированности можно ослабить — достаточно, чтобы суммы координат у точек P и Q были одинаковы.

Пример (прямая Нагеля). Поскольку

$$(a : b : c) + (p-a : p-b : p-c) = (p : p : p),$$

то точки I, M, N лежат на одной прямой. Переписав это равенство в виде

$$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{a}{2p} : \frac{b}{2p} : \frac{c}{2p}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{p-a}{p} : \frac{p-b}{p} : \frac{p-c}{p}\right) = \left(\frac{1}{3} : \frac{1}{3} : \frac{1}{3}\right),$$

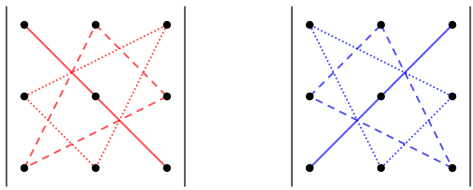
получаем, что точка M делит отрезок IN в отношении $1 : 2$.

Обычно в задачах не нужно явно искать коэффициенты линейной комбинации, достаточно проверить, что она существует. Это можно сделать с помощью *определителя порядка* 3:

$$\begin{vmatrix} x_p & y_p & z_p \\ x_q & y_q & z_q \\ x_r & y_r & z_r \end{vmatrix} = x_p y_q z_r + x_r y_p z_q + x_q y_r z_p - x_p y_r z_q - x_q y_p z_r - x_r y_q z_p =$$

$$= x_r(y_p z_q - y_q z_p) - y_r(x_p z_q - x_q z_p) + z_r(x_p y_q - x_q y_p).$$

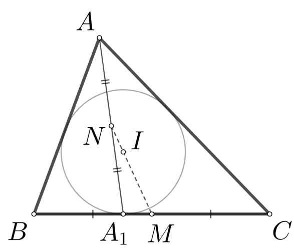
Каждое слагаемое получается так: выбирается тройка чисел так, что любые два находятся в разных строках и разных столбцах, числа перемножаются и складываются со знаком. Знак «+» берётся у диагонали и двух треугольников, отмеченных на картинке красным цветом, знак «−» берётся у диагонали и двух треугольников, отмеченных синим цветом.



Нам потребуется известный факт про определитель из линейной алгебры — одна тройка чисел является линейной комбинацией двух других тогда и только тогда, когда определитель равен 0. Это следует, например, из геометрической интерпретации: определитель равен ориентированному объёму параллелепипеда, натянутого на векторы (x_p, y_p, z_p), (x_q, y_q, z_q), (x_r, y_r, z_r). Объём равен 0 только в случае, когда векторы лежат в одной плоскости, а в этом случае один из них можно выразить, как линейную комбинацию двух других.

Пример. Окружность с центром I, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке A_1. Докажите, что точка I лежит на отрезке, соединяющем середины отрезков AA_1 и BC.

Решение. Пусть M — середина BC, N — середина AA_1. Найдём их барицентрические координаты.



Координаты точки $M = (0 : 1 : 1)$. Чтобы найти координаты точки N, нужно рассмотреть полусумму нормированных координат точек A и A_1 или просто сумму координат точек A

и A_1, имеющих одинаковую массу. Барицентрические координаты точки $A_1 = (0 : p-c : p-b)$. Сумма координат равна $(p-c)+(p-b)=a$, поэтому в качестве координат точки A возьмём $(a : 0 : 0)$. Тогда барицентрические координаты точки $N = (a : p-c : p-b)$.

Чтобы доказать, что точки I, M, N лежат на одной прямой, проверим, что определитель, составленный из их координат, равен 0:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & p-c & p-b \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\cdot(b(p-b)-c(p-c)) - 1\cdot(a(p-b)-ca) + 1\cdot(a(p-c)-ba) =$$

$$= -ap + ab + ac + ap - ac - ab = 0,$$

что и требовалось. □

Задачи

4. Докажите, что точки H, M, O лежат на одной прямой.
Указание. Воспользуйтесь координатами, выраженными через S_A, S_B, S_C.

5. Окружность с центром I, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и AC в точках C_1, B_1 соответственно. Медиана AM треугольника пересекает B_1C_1 в точке P. Докажите, что $IP \perp BC$.

6. В треугольнике ABC биссектрисы BB_1 и CC_1 пересекаются в точке I, X — середина B_1C_1, Y — точка пересечения касательных к окружности (ABC), проведённых в точках B и C. Докажите, что точки X, I и Y лежат на одной прямой.

3. Уравнение прямой

Подставим в определитель вместо координат одной из точек тройку $(x : y : z)$. Получится линейная функция

$$\begin{vmatrix} x_p & y_p & z_p \\ x_q & y_q & z_q \\ x & y & z \end{vmatrix} = x(y_pz_q - y_qz_p) - y(x_pz_q - x_qz_p) + z(x_py_q - x_qy_p).$$

Приравняв это выражение к нулю, получим уравнение, которому удовлетворяют точки прямой PQ и только они. Таким образом, полученное уравнение — это уравнение прямой PQ.

Упражнение. Докажите, что если среди $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ есть неравные, то уравнение $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ задаёт прямую.

Примеры

1. *Медиана, проведённая из вершины A.* Она проходит через точки с координатами $(1 : 0 : 0)$ и $(0 : 1 : 1)$, то есть её уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; x(0 \cdot 1 - 0 \cdot 1) - y(1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) + z(1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = 0 \;\Leftrightarrow\; x - y = 0.$$

2. *Биссектриса угла A.* Вместо того, чтобы записывать определитель, давайте просто угадаем уравнение прямой. Биссектриса проходит через вершину A и основание биссектрисы угла A, то есть через точки с координатами $(1 : 0 : 0)$ и $(0 : b : c)$. Заметим, что они удовлетворяют уравнению $cy - bz = 0$, поэтому это уравнение и задаёт биссектрису.

   Отметим, что в общем случае уравнение чевианы треугольника ищется аналогично. Пусть мы хотим найти уравнение прямой AP, где P имеет барицентрические координаты $(x_p : y_p : z_p)$. Несложно видеть, что подойдёт прямая $z_p y - y_p z = 0$.

3. *Серединный перпендикуляр к BC.* Он проходит через середину BC и через точку пересечения касательных в точках B и C к (ABC), то есть через точки с координатами $(0 : 1 : 1)$ и $(-a^2 : b^2 : c^2)$. Тогда его уравнение

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -a^2 & b^2 & c^2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; x(c^2 - b^2) - a^2 y + a^2 z = 0.$$

4. *Середина малой дуги BC окружности (ABC).* Середина дуги — это точка пересечения биссектрисы угла A и серединного перпендикуляра к стороне BC, поэтому её координаты являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} cy - bz = 0, \\ x(c^2 - b^2) - a^2 y + a^2 z = 0. \end{cases}$$

   Поскольку координаты точки определены с точностью до пропорциональности, то значение одной из координат можно выбрать произвольным (поскольку середина дуги не лежит на сторонах, то все координаты ненулевые). Пусть $y = b$, тогда из первого уравнения $z = c$. Подставим во второе уравнение:

$$x(c^2 - b^2) - a^2 b + a^2 c = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{a^2(b - c)}{c^2 - b^2} = -\frac{a^2}{b + c}.$$

   Таким образом, середина дуги имеет координаты

$$\left(-\frac{a^2}{b + c} : b : c\right) = (-a^2 : b(b + c) : c(b + c)).$$

Задачи

7. Найдите уравнение

(а) средней линии, параллельной BC;

(б) внешней биссектрисы угла A;

(в) касательной к описанной окружности треугольника в вершине A;

(г) прямой Эйлера (выразите коэффициенты через S_A, S_B, S_C).

8. Найдите барицентрические координаты

(а) середины дуги BAC окружности (ABC);

(б) проекции вершины C на биссектрису угла B.

4. Бесконечно удалённая прямая

Этот раздел можно безболезненно пропустить. Основной факт, который мы будем из него использовать дальше — уравнение $x + y + z = 0$ задаёт бесконечно удалённую прямую.

До сих пор мы рассматривали систему материальных точек с ненулевой суммарной массой. В случае нулевой суммы масс центр масс не определён, но следующая лемма показывает, что в большинстве случаев можно считать, что центр масс этих точек — это бесконечно удалённая точка.

Лемма о диполе. *Дана система материальных точек (A_1, m_1), (A_2, m_2), ..., (A_n, m_n), суммарная масса которых равна 0.*

1. *Вектор $\vec{v} = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OA_i}$ не зависит от выбора точки O.*

2. *Систему разбили на две группы с ненулевыми суммами масс, при этом группа с положительной суммой масс m группируется в точку O_+, а группа с отрицательной суммой масс группируется в точку O_-. Тогда $\vec{v} = m\overrightarrow{O_-O_+}$.*

Доказательство. 1. Выберем точки O_1 и O_2 и докажем, что соответствующие суммы равны. Для этого рассмотрим их разность:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{O_1A_i} - \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{O_2A_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\overrightarrow{O_1A_i} - \overrightarrow{O_2A_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{O_1O_2} = 0,$$

так как $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i = 0$.

2. Пусть система разбита на две группы:

- (B_1, β_1), (B_2, β_2), ..., (B_k, β_k) с суммарной массой $m > 0$ и центром масс O_+;
- (C_1, γ_1), (C_2, γ_2), ..., (C_l, γ_l) с суммарной массой $-m < 0$ и центром масс O_-.

Выберем произвольную точку O. Поскольку O_+ и O_- — центры масс групп, то

$$m\overrightarrow{OO_+} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \overrightarrow{OB_i}, \quad -m\overrightarrow{OO_-} = \sum_{i=1}^{l} \gamma_i \overrightarrow{OC_i}.$$

Сложив выражения, получим

$$m\overrightarrow{O_-O_+} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \overrightarrow{OB_i} + \sum_{i=1}^{l} \gamma_i \overrightarrow{OC_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{v},$$

что и требовалось. □

Из леммы о диполе следует, что если $\vec{v} \neq 0$, то при любом разбиении на две группы с ненулевыми массами прямая, соединяющая центры масс групп, будет иметь фиксированное направление. Будем говорить, что центром масс такой системы является бесконечно удалённая точка, соответствующая этому направлению.

Упражнение. Докажите, что для любой бесконечно удалённой точки в вершины треугольника ABC можно поместить массы так, чтобы центр масс попал в эту точку, причём если две тройки задают одну и ту же точку, то они пропорциональны.

Сумма координат бесконечно удалённых точек равна 0, поэтому они удовлетворяют уравнению $x + y + z = 0$. То есть это уравнение задаёт бесконечно удалённую прямую.

Задачи

9. **(а)** Докажите, что координаты бесконечно удалённой точки на прямой PQ, соединяющей точки с нормированными координатами $(x_p : y_p : z_p)$ и $(x_q : y_q : z_q)$, — это $(x_p - x_q : y_p - y_q : z_p : z_q)$.
(б) Докажите, что точки P, Q, R, некоторые из которых, возможно, бесконечно удалённые, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда определитель, составленный из их координат, равен 0.

10. Докажите, что бесконечно удалённая точка, лежащая на прямой $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, имеет координаты $(\alpha - \beta : \beta - \gamma : \gamma - \alpha)$.

5. Пересечение и параллельность прямых

Допустим, мы хотим проверить, что прямые $\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z = 0$, $i = 1, 2, 3$, пересекаются в одной точке или параллельны. Это эквивалентно тому, что система уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = 0, \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = 0, \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = 0 \end{cases}$$

имеет ненулевое решение. Ещё один стандартный факт из линейной алгебры, который мы не будем доказывать — эта система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель, составленный из коэффициентов, равен 0:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Из задач 9 и 10 следует способ доказывать параллельность прямых.

- Прямые PQ и RS параллельны тогда и только тогда, когда

$$(x_p - x_q : y_p - y_q : z_p - z_q) = (x_r - x_s : y_r - y_s : z_r - z_s).$$

- Прямые $\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z = 0$, $i = 1, 2$, параллельны тогда и только тогда, когда

$$(\alpha_1 - \beta_1 : \beta_1 - \gamma_1 : \gamma_1 - \alpha_1) = (\alpha_2 - \beta_2 : \beta_2 - \gamma_2 : \gamma_2 - \alpha_2).$$

В обоих пунктах имеется в виду равенство с точностью до пропорциональности. Ещё один способ — записать условие, что две прямые пересекаются на бесконечно удалённой прямой, то есть система уравнений имеет ненулевое решение

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = 0, \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = 0, \\ x + y + z = 0, \end{cases}$$

что эквивалентно тому, что определитель из коэффициентов равен 0:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Задачи

11. **Задача 255.** Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно, вневписанная окружность касается стороны AC и продолжением стороны AB в точках B_2 и C_2 соответственно. Докажите, что прямые B_1C_1 и B_2C_2, биссектриса угла B и средняя линия, параллельная AB пересекаются в одной точке.

12. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC выбраны точки A_1, B_1 и C_1, причём отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке P. Пусть ℓ_a — прямая, соединяющая середины отрезков BC и B_1C_1, прямые ℓ_b, ℓ_c определяются аналогично. Докажите, что прямые ℓ_a, ℓ_b и ℓ_c пересекаются в одной точке.

13. **Прямая Гаусса.** В четырёхугольнике $ABCD$ прямые AB и CD пересекаются в точке E, а прямые AD и BC — в точке F. Докажите, что середины отрезков AC, BD, EF лежат на одной прямой.

14. Докажите, что прямые, соединяющие середины сторон треугольника с серединами соответствующих высот пересекаются в точке Лемуана треугольника.

15. Докажите, что прямые, соединяющие середины сторон с соответствующими центрами вневписанных окружностей, пересекаются в одной точке. Найдите координаты этой точки.

16. Вершины треугольника соединяют с центрами соответствующих квадратов, построенных внешним образом на сторонах. Докажите, что три таких прямых пересекаются в одной точке и найдите барицентрические координаты точки пересечения. Что поменяется, если квадраты построить внутрь?

17. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы A, B и C равны. Докажите, что D лежит на прямой Эйлера треугольника ABC.

18. В треугольнике ABC биссектрисы BB_1 и CC_1 пересекаются в точке I. На отрезках BC_1 и CB_1 как на диаметрах построены окружности, внутренние касательные к ним пересекаются в точке X. Докажите, что прямая XI проходит через середину дуги BAC окружности (ABC).

19. В треугольнике ABC симедианы, проведённые из вершин B и C пересекают стороны AC и AB в точках D и E соответственно. Точки P и Q — середины отрезков BD и CE соответственно. Докажите, что $\angle PCB = \angle QBC$.

20. Центр I вписанной окружности отразили относительно сторон BC, CA, AB треугольника ABC — получили точки X, Y, Z. Докажите, что прямые AX, BY и CZ, пересекаются в точке, которая лежит на прямой, проходящей через I параллельно прямой Эйлера треугольника ABC.