Геометрия масс

Материальной точкой будем называть пары вида (A, m), где A — точка плоскости, а m — произвольное действительное число (масса).

Центром масс материальных точек материальных точек (A_1, m_1), (A_2, m_2), …, (A_n, m_n) будем называть точку Z такую, что

$$m_1\overrightarrow{ZA_1} + m_2\overrightarrow{ZA_2} + \ldots + m_n\overrightarrow{ZA_n} = \overrightarrow{0}.$$

Утверждение. Если сумма масс не равна нулю, то центр масс существует и единственен, причём для произвольной точки X плоскости положение центра масс Z можно получить с помощью формулы

$$\overrightarrow{XZ} = \frac{m_1\overrightarrow{XA_1} + m_2\overrightarrow{XA_2} + \ldots + m_n\overrightarrow{XA_n}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

В частности, для двух материальных точек (A, m_1), (A_2, m_2) выполнено *правило рычага*: $\overrightarrow{A_1Z} : \overrightarrow{ZA_2} = m_2 : m_1$.

Теорема о группировке. Дана некоторая система материальных точек. Выберем часть из них и заменим на центр масс выбранных точек (с массой, равной сумме выбранных масс). Тогда центр масс всей системы не изменится.

1. В шестиугольнике точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 являются серединами последовательных сторон. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников $A_1A_3A_5$ и $A_2A_4A_6$ совпадают.

2. Пусть X, Y, Z — точки пересечения медиан треугольников PBC, PAC, PAB соответственно. Докажите, точка P и точки пересечения медиан треугольников ABC и XYZ лежат на одной прямой.

3. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ выбраны точки K и L так, что $BK : KC = CL : LD$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника AKL лежит на диагонали BD.

4. Какие массы надо положить в вершины треугольника со сторонами a, b, c и углами α, β, γ, чтобы центр масс попал в
(а) точку Нагеля;
(б) центр вневписанной окружности со стороны вершины A;
(в) точку D такую, что $ABDC$ — параллелограмм;
(г) ортоцентр;
(д) центр описанной окружности?

5. **Прямая Нагеля.** Докажите, что центр вписанной окружности I, точка пересечения медиан M и точка Нагеля N лежат на одной прямой, причём $NM = 2MI$.

6. Внутри треугольника ABC отмечена точка X. Её отразили относительно середин сторон AB, AC, BC, получили точки X_c, X_b, X_a соответственно. Докажите, что прямые AX_a, BX_b, CX_c пересекаются в одной точке.

7. **(а)** В точках касания описанного n-угольника со своей вписанной окружностью расставлены массы, равные длине соответствующих сторон. Докажите, что центр масс рассматриваемой системы совпадает с центром вписанной окружности.

(б) **Теорема Ньютона.** Докажите, что в описанном четырёхугольнике центр вписанной окружности лежит на отрезке, соединяющем середины его диагоналей.

8. На сторонах AB, AC, BC треугольника ABC выбраны точки C_1, B_1, A_1 соответственно. Отрезки AA_1 и B_1C_1 пересекаются в точке X. Оказалось, что получившиеся четырёхугольники являются описанными. Пусть a и b — радиусы вписанных окружностей треугольников AXC_1 и AXB_1 соответственно, c и d — радиусы вписанных окружностей четырёхугольников BA_1XC_1 и CA_1XB_1 соответственно. Докажите, что $1/a + 1/d = 1/b + 1/c$.