Многочлены, генерирующие простые числа

Определение. *Счастливыми числами Эйлера* называются простые числа p, такие что квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + x + p$ принимает простые значения при всех целых x от 0 до $p - 2$ включительно.

1. Сформулируйте эквивалентное определение СЧЭ для квадратного трёхчлена $g(x) = x^2 - x + p$.

2. Предположим, что существует такое натуральное число $n \leqslant p - 2$, что $f(n)$ — составное. Будем считать n наименьшим среди таких чисел. Пусть q — наименьший простой делитель числа $f(n)$.
(а) Докажите, что $f(q - 1 - n) = f(n - q)$ кратно q.
(б) Докажите, что $f(q - 1 - n)$ составное.
(в) Докажите, что $q \geqslant 2n + 1$.
(г) Докажите, что если $f(x)$ принимает простые значения при всех целых x от 0 до $[\sqrt{p/3}]$, то p — СЧЭ.

С помощью предыдущей задачи достаточно легко убедиться, что числа $2, 3, 5, 11, 17, 41$ являются СЧЭ. Гораздо более сложным является утверждение, что других СЧЭ нет.

3. Докажите, что многочлен $x^2 - 79x + 1601$ принимает простые значения при всех $x = 0, 1, \ldots, 79$.

4. Рассмотрим многочлен $P(x) = x^2 + 1$. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n, таких что наибольший простой делитель $P(n)$ больше **(а)** $2n$ **(б)** $2n + \sqrt{2n}$.

5. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами степени n и отличный от константы.
(а) Докажите, что если существует бесконечно много натуральных чисел k, что $P(k)$ — простое, то у $P(x)$ старший коэффициент больше нуля, он неприводим над $\mathbb{Z}$, а также НОД чисел $P(1), P(2), \ldots$ равен 1. (Подумайте на досуге, верно ли обратное:)
(б) Обозначим за S множество всех простых делителей чисел $P(k)$ для всех натуральных k. Докажите, что S — бесконечное множество.
(в) Докажите, что если некоторое простое число $m > n$ делит $P(k)$ при всех натуральных числах k, то оно также делит все коэффициенты $P(x)$.