Городские кружки ЦПМ
Весенние сборы, март-апрель 2025, 9 класс
Материалы занятий

Содержание

Часть I

Группа 9–1

1 Алгебра

Квадратные трёхчлены

1. Числа $b > 0$ и a таковы, что квадратный трехчлен $x^2 + ax + b$ имеет два различных корня, ровно один из которых лежит на отрезке $[-1, 1]$. Докажите, что ровно один из этих корней лежит в интервале $(-b; b)$.

2. Приведённые квадратные трёхчлены $P(x)$ и $Q(x)$ таковы, что уравнения

$$P(Q(x)) = 0 \quad \text{и} \quad Q(P(x)) = 0$$

не имеют вещественных корней. Докажите, что хотя бы одно из уравнений $P(P(x)) = 0$ и $Q(Q(x)) = 0$ тоже не имеет вещественных корней.

3. Верно ли, что для любых трёх различных натуральных чисел a, b, c найдётся квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами и положительным старшим коэффициентом, принимающий в некоторых целых точках значения a^3, b^3, c^3?

4. Сколькими способами можно разбить множество чисел $1, 2, 4, \ldots, 2^{2025}$ на два непустых множества A и B, так чтобы уравнение $x^2 - S(A)x + S(B) = 0$ имело целый корень? Здесь за $S(M)$ обозначена сумма чисел множества M.

5. Квадратный трёхчлен $P(x)$ разрешается заменить на один из трёхчленов

$$x^2 P\left(\frac{1}{x} + 1\right) \quad \text{или} \quad (x-1)^2 P\left(\frac{1}{x-1}\right).$$

Можно ли с помощью таких операций из квадратного трёхчлена $x^2 + 4x + 3$ получить трёхчлен $x^2 + 10x + 9$?

6. Среди квадратных трехчленов $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ нет равных и противоположных. Может ли оказаться, что уравнение $|P(x)| = |Q(x)| = |R(x)|$ имеет четыре различных действительных решения?

7. Дан квадратный трёхчлен $P(x)$. Докажите, что найдутся квадратные трёхчлены $Q(x)$ и $R(x)$, такие что $P(x)P(x+1) = Q(R(x))$.

8. Артём Рустамович выбрал 199 квадратных трёхчленов с вещественными коэффициентами так, что сумма любых ста из них имеет вещественный корень. Докажите, что сумма каких-то девяти из них также имеет вещественный корень.

Неприводимые многочлены

Определение. Многочлен с коэффициентами в $\mathbb{K}$ называется *приводимым* над $\mathbb{K}$, если его можно представить в виде произведения двух многочленов ненулевой степени с коэффициентами в $\mathbb{K}$. В противном случае многочлен называется *неприводимым*.

Определение. Пусть $\mathbb{K}$ равно $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. *Наибольшим общим делителем* двух многочленов называется многочлен, который делит данные многочлены и кратен их любому другому общему делителю.

1. **Лемма Гаусса.**
(а) Многочлен с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ называется *примитивным*, если его коэффициенты взаимно просты в совокупности. Докажите, что произведение двух примитивных многочленов — примитивный многочлен.
(б) Докажите, что многочлен с целыми коэффициентами приводимый в $\mathbb{Q}$ приводим и в $\mathbb{Z}$.

2. Многочлен $P^*(x)$ называется *взаимным* по отношению к многочлену $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, если его коэффициенты расположены в обратном порядке: $P^*(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$. Докажите, что многочлен с рациональными коэффициентами и $a_0 \neq 0$ неприводим над $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда неприводим его взаимный.

3. **(а)** Воспользовавшись аналогом алгоритма Евклида для многочленов, докажите, что НОД многочленов существует и единственен с точностью до умножения на константу.
(б) Сформулируйте и докажите аналог теоремы Безу про НОД для многочленов.
(в) У двух многочленов, неприводимых над $\mathbb{Q}$, нашёлся общий вещественный корень. Докажите, что эти многочлены отличаются друг от друга умножением на константу.

4. **Критерий Эйзенштейна.** Пусть $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что существует такое простое число p, что a_i кратно p при $i = 0, 1, \ldots, n-1$, a_0 и a_n не кратны p. Докажите, что $P(x)$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

5. Докажите, что следующие многочлены неприводимы над $\mathbb{Q}$:
(а) $2x^4 - 4x^2 + 8x + 1$,
(б) $(x+1)^p + p - 1$,
(в) $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n) - 1$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные целые числа,
(г) $x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$, где p — некоторое простое число,
(д) $x^n + 5x^{n-1} + 3$.

6. Неприводимый над $\mathbb{Z}$ многочлен $P(x)$ имеет два вещественных корня, дающих в произведении 1. Докажите, что $P(x)$ имеет чётную степень.

7. Многочлен с целыми коэффициентами степени n принимает в некоторых n различных целых точках значения, отличные от нуля и по модулю меньшие, чем $\frac{m!}{2^m}$, где $m = n - [\frac{n}{2}]$. Докажите, что он неприводим над $\mathbb{Z}$.

Неприводимые многочлены. $\mathbb{C}$-Добавка

1. **(а)** Дан многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ с целыми коэффициентами, такой что $|a_0| > |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$ и $|a_0|$ — простое число. Докажите, что $P(x)$ — неприводим над $\mathbb{Z}$.

(б) **Критерий Перрона.** Дан многочлен $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ с целыми коэффициентами, такой что $|a_{n-1}| > |a_0| + |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_{n-2}| + 1$ и $a_0 \neq 0$. Докажите, что $P(x)$ — неприводим над $\mathbb{Z}$.

2. Рациональное число x таково, что $\cos(\pi x)$ так же является рациональным. Докажите, что $\cos(\pi x) \in \{0, \pm 1, \pm \frac{1}{2}\}$.

3. **(а)** Дан многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ с целыми коэффициентами. Известно, что $a_n \geqslant 1$, $a_{n-1} \geqslant 0$ и $|a_i| < M$, где $i = 0, 1, \ldots, n-2$, а M — некоторое положительное число. Пусть z — корень $P(x)$ (возможно, комплексный), такой что $\mathrm{Re}(z) \geqslant 0$. Докажите, что $|z| < \frac{1+\sqrt{1+4M}}{2}$.

(б) **Критерий Кона.** Пусть p — некоторое простое число. Запишем число p в m-ичной системе счисления: $p = \overline{p_n p_{n-1} \ldots p_0}$, где $0 \leqslant p_i \leqslant m-1$, $p_n \neq 0$, а m — целое, большее двух. Тогда многочлен $P(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_0$ неприводим.

ТЧ разнобой

1. Назовём *главными делителями* составного числа n два наибольших его натуральных делителя, отличных от n. Составные натуральные числа a и b таковы, что главные делители числа a совпадают с главными делителями числа b. Докажите, что $a = b$.

2. Пусть p — нечетное простое число и a, b, c — такие целые числа, что $a^{2023}+b^{2023}$, $b^{2024} + c^{2024}$, $c^{2025} + a^{2025}$ делятся на p. Докажите, что a, b, c делятся на p.

3. Самый лучший преподаватель Сергей[1] изучает делители чисел. Для каждого натурального числа n он находит наибольший его делитель d, меньший $\sqrt{n}$. После этого он выписывает на доску число $\frac{n}{d} - d$. Докажите, что любое число k рано или поздно окажется на доске.

4. Существуют ли попарно различные натуральные числа $a_1, \ldots a_{100}$, одновременно удовлетворяющие следующим условиям:

1. число $a_1 a_2 \ldots a_{100}$ делится на $a_i + a_j$ при всех $1 \leqslant i < j \leqslant 100$;
2. для каждого $k = 1, 2, ..., 100$ найдутся индексы i, j такие, что $1 \leqslant i < j \leqslant 100$ и число $a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_{k+1} \ldots a_{99} a_{100}$ не делится на $a_i + a_j$?

5. Решите уравнение в натуральных числах $x \cdot y! + 2y \cdot x! = z!$.

6. Даны натуральные числа a и b. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что число $a^n + 1$ **не** делится на $n^b + 1$.

7. Данил Евгеньевич выбрал натуральное число $N > 1$ и выписал в строчку в порядке возрастания все его натуральные делители: $d_1 < \ldots < d_s$ (так что $d_1 = 1$ и $d_s = N$). Затем для каждой пары стоящих рядом чисел он вычислил их наибольший общий делитель; сумма полученных $s - 1$ чисел оказалась равной $N - 2$. Какие значения могло принимать N?

8. Докажите, что не существует целого числа, чей куб можно представить в виде $y^2 + 108$.

9. Целые числа m, n таковы, что $m > 20$ и $n > 1$, причём $n^2 | m$. Докажите, что существуют натуральные числа x, y, z, такие что $n = xy + xz + yz$.

[1] По версии большой языковой модели DeepSeek

Метаразнобой

1. Дана бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots$, в которой нет двух равных членов. Отрезок $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+m-1}$ этой последовательности назовём *монотонным отрезком длины* m, если выполнены неравенства $a_i < a_{i+1} < \ldots < a_{i+m-1}$ или неравенства $a_i > a_{i+1} > \ldots > a_{i+m-1}$. Оказалось, что для каждого натурального k член a_k содержится в некотором монотонном отрезке длины $k+1$. Докажите, что существует натуральное N, начиная с которого последовательность монотонна до бесконечности.

2. Докажите, что при $N \geqslant 6$ не существует последовательности целых положительных чисел $\{a_n\}$, $n = 1, \ldots, N$, такой что для каждого $1 \leqslant n \leqslant N-2$ выполняется соотношение $a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1}} + a_n$.

3. В республике математиков выбрали число $\alpha > 2$ и выпустили монеты достоинствами в 1 рубль, а также в α^k рублей при каждом натуральном k. При этом α было выбрано так, что достоинства всех монет, кроме самой мелкой, иррациональны. Могло ли оказаться, что любую сумму в натуральное число рублей можно набрать этими монетами, используя монеты каждого достоинства не более 6 раз?

4. Пусть n — некоторое d-значное натуральное число, не делящееся на 10. Выписав цифры числа n в обратном порядке, получили число m. Может ли десятичная запись произведения nm состоять только из цифр «8», если
(а) $d = 9998$; **(б)** $d = 9999$?

5. Найдите все пары положительных вещественных чисел (a, b), таких что $[a[bn]] = n - 1$ для любого натурального n.

6. Рассмотрим все 100-значные числа, делящиеся на 19. Докажите, что количество таких чисел, не содержащих цифр 4, 5 и 6, равно количеству таких чисел, не содержащих цифр 1, 4 и 7.

7. Назовём натуральное число *милым*, если оно состоит только из цифр $1, 2, 3, 4, 5$ и разность любых двух соседних цифр отличается хотя бы на 2. Обозначим за $M(n)$ число n-значных милых чисел. Докажите, что $M(n) \geqslant 5 \cdot 2{,}4^{n-1}$.

Постметаразнобой

1. Вещественные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ лежат в отрезке $[-1, 1]$ и в сумме дают 0. Докажите, что эти числа можно выписать в некотором порядке $y_1, y_2, \ldots, y_n$ так, что для любых $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ будет верно $|y_i + y_{i+1} + \ldots + y_j| \leqslant 2$.

2. Вещественные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таковы, что верно $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$ и $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Обозначим за $X = \max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и за $Y = \min(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Докажите, что при $n \geqslant 3$ выполняется $XY \leqslant -\frac{1}{n}$.

3. Положительные вещественные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и вещественное число s таковы, что $x_1+x_2+\ldots+x_n = 3s$, $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 = 3s^2$ и $x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3 > 3s^3+s$. Докажите, что какие-то два числа из множества $x_1, x_2, \ldots, x_n$ отличаются больше, чем на 1.

4. Дано натуральное число n. Пусть S — множество точек интервала $(0, 1)$ таких, что $|x - \frac{p}{q}| > \frac{1}{n^3}$ для любого рационального $\frac{p}{q}$ со знаменателем $q \leqslant n^2$. Докажите, что S представляет собой объединение интервалов суммарной длины не более $\frac{4}{n}$.

2 Геометрия

Равенство отрезков

1. Внутри треугольника ABC отметили такую точку P, что $\angle ABP = \angle CPM$, где M — середина отрезка AC. Прямая PM повторно пересекает описанную окружность треугольника APB в точке Q. Докажите, что $AQ = CP$.

2. Пусть I и O —– центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC соответственно. Точки P и Q таковы, что $AIOP$ и $BIOQ$ — равнобокие трапеции ($AI \parallel OP$, $BI \parallel OQ$). Докажите, что $CP = CQ$.

3. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту AH и медиану AM. На сторонах AB и AC отметили точки X и Y такие, что $AX = XC$ и $AY = YB$. Докажите, что середина XY равноудалена от H и M.

4. Окружность ω касается сторон AB и AC треугольника ABC. Окружность Ω касается стороны AC и продолжения стороны AB за точку B, а также касается ω в точке L, лежащей на стороне BC. Прямая AL вторично пересекает ω и Ω в точках K и M соответственно. Оказалось, что $KB \parallel CM$. Докажите, что треугольник LCM равнобедренный.

5. Окружность Ω с центром в точке O описана около остроугольного треугольника ABC, в котором $AB < BC$; его высоты пересекаются в точке H. На продолжении отрезка BO за точку O отмечена точка D такая, что $\angle ADC = \angle ABC$. Прямая, проходящая через точку H параллельно прямой BO, пересекает меньшую дугу AC окружности Ω в точке E. Докажите, что $BH = DE$.

6. В треугольнике ABC отмечены середины сторон BC, AB и AC — точки D, E и F соответственно. Пусть M — точка пересечения биссектрисы угла ADB и стороны AB, а N — точка пересечения биссектрисы угла ADC и стороны AC. Также пусть S — точка пересечения AD и MN, P — точка пересечения AB и FS, а R — точка пересечения AC и ES. Докажите, что $PR = AD$.

7. В треугольник ABC вписана окружность ω, касающаяся стороны BC в точке K. Окружность ω' симметрична окружности ω относительно точки A. Точка A_0 выбрана так, что отрезки BA_0 и CA_0 касаются ω'. Пусть M — середина стороны BC. Докажите, что прямая AM делит отрезок KA_0 пополам.

Коллинеарность

1. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) отмечены середины X и Y сторон AB и AC соответственно. Точка Z — основание перпендикуляра из B на прямую CX. Докажите, что центр описанной окружности треугольника XYZ лежит на прямой AC.

2. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Окружность ω, проходящая через вершины B и C, вторично пересекает сторону AB и диагональ BD в точках X и Y соответственно. Касательная, проведённая к окружности ω в точке C, пересекает луч AD в точке Z. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой.

3. Пусть ABC — остроугольный треугольник. Точки D и E на сторонах AB и AC соответственно таковы, что прямые BC и DE параллельны. Пусть X — внутренняя точка четырёхугольника $BCED$. Лучи DX и EX пересекают отрезок BC в точках P и Q соответственно. Описанные окружности треугольников BQX и CPX вторично пересекаются в точке Y. Докажите, что точки A, X и Y лежат на одной прямой.

4. Биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекают его описанную окружность Ω в точках B_1 и C_1 соответственно. Окружность ω_1 с центром B_1 касается AC, окружность ω_2 с центром C_1 касается AB.
(а) Докажите, что центр вписанной в треугольник ABC окружности лежит на одной из общих внешних касательных к окружностям ω_1 и ω_2.
(б) Докажите, что окружности Ω, ω_1 и ω_2 имеют общую касательную.

5. В треугольнике ABC отметили ортоцентр H, середину M стороны BC, а также провели высоту AD. Точка P плоскости такова, что $HMPD$ — параллелограмм. Окружность с центром в P, проходящая через точки B и C, повторно пересекает AB и AC в точках X и Y. Докажите, что точки D, X, Y лежат на одной прямой.

6. Дана трапеция $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, а лучи AB и DC пересекаются в точке G. Общие внешние касательные к окружностям, описанным около треугольников ABC и ACD, пересекаются в точке E. Общие внешние касательные к окружностям, описанным около треугольников ABD и BCD, пересекаются в точке F. Докажите, что точки E, F и G лежат на одной прямой.

Добавка

1. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω, а его диагонали пересекаются в точке K. Точки M_1, M_2, M_3, M_4 — середины дуг AB, BC, CD, DA (не содержащих других вершин четырехугольника) соответственно. Точки I_1, I_2, I_3, I_4 — центры окружностей, вписанных в треугольники ABK, BCK, CDK, DAK соответственно. Докажите, что прямые M_1I_1, M_2I_2, M_3I_3, M_4I_4 пересекаются в одной точке.

2. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. На луче DA за точкой A выбрана точка P. Из точки P проведены касательные PQ и PR к описанным окружностям треугольников ABD и ACD такие, что обе окружности лежат внутри угла QPR. Отрезки BR и QC пересекаются в точке K. Прямая, проходящая через точку K параллельно BC пересекает отрезки QD, AD и RD в точках E, L и F соответственно. Докажите, что $KF = LE$.

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы B и D равны $120°$. Точки A', B', C' симметричны D относительно BC, CA, AB соответственно. Докажите, что прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

Точка Шалтая

Точкой Шалтая треугольника ABC со стороны вершины A назовём такую точку Ш, что

$$\angle BA\text{Ш} = \angle CB\text{Ш} \quad \text{и} \quad \angle CA\text{Ш} = \angle BC\text{Ш}.$$

Несложно проверить, что Ш лежит на медиане AM и окружности (BHC).

В остроугольном треугольнике ABC

- H — точка пересечения высот AA_1, BB_1, CC_1;
- M — середина стороны BC;
- E — точка, симметричная H относительно BC;
- L — пересечение симедианы из вершины A с (ABC).

1. **(а)** Докажите, что Ш — проекция H на AM.
(б) Докажите, что Ш и L симметричны относительно BC.
(в) Докажите, что $\text{Ш}B/\text{Ш}C = AB/AC$.
(г) Докажите, что четырёхугольники $BC_1\text{Ш}M$ и $B_1C\text{Ш}M$ вписанные.
(д) Докажите, что прямые B_1C_1 и $H\text{Ш}$ пересекаются на прямой BC.

Упражнение. Пусть Ш$'$ — точка Шалтая треугольника BHC со стороны вершины H. Нарисуйте для неё все факты из теории и задачи 1 (кроме (б)).

2. Докажите, что B_1, C_1, L и E лежат на одной окружности.

3. Докажите, что A, M, E и точка пересечения прямых BC и B_1C_1 лежат на одной окружности.

4. Касательные к (ABC) в вершинах B и C пересекаются в точке T. Докажите, что Ш$'$, A_1, L и середина отрезка MT лежат на одной прямой.

5. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки C' и B' соответственно так, что $\angle AC'C = \angle CB'B$. Докажите, что описанная окружность треугольника $AB'C'$ проходит через Ш.

6. На продолжениях высот BB_1 и CC_1 выбраны точки X и Y соответственно так, что $AXHY$ — параллелограмм. Докажите, что точка Ш лежит на окружности (XHY).

7. Касательная к (ABC) в точке Ш$'$ пересекает прямую BC в точке X. Докажите, что $XH = X\text{Ш}'$.

8. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Рассмотрим четыре точки Шалтая: треугольника DAB со стороны вершины A, треугольника ABC со стороны вершины B, треугольника BCD со стороны вершины C, треугольника CDA со стороны вершины D. Докажите, что они лежат на одной окружности.

Точка Болтая

Точкой Болтая треугольника ABC со стороны вершины A назовём такую точку Б, что

$$\angle BA\text{Б} = \angle AC\text{Б} \quad \text{и} \quad \angle CA\text{Б} = \angle AB\text{Б}.$$

Несложно видеть, что лежит на (BOC).

1. **(а)** Докажите, что Б — это проекция O на симедииану.
   (б) Докажите, что Б и Ш изогонально сопряжены.

2. В треугольнике ABC провели высоту AH и отметили точку M — середину стороны AB. Докажите, что описанная окружность треугольника BMH проходит через точку Болтая со стороны вершины A.

3. Касательная к описанной окружности треугольника ABC, проведённая в точке A, пересекает прямую BC в точке D. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что прямая OD проходит через точку Болтая со стороны вершины A.

4. В треугольнике ABC провели высоту AD и отметили середины M и N отрезков AB и AC. Докажите, что прямая, проходящая через D и точку Болтая со стороны вершины A, делит отрезок MN пополам.

5. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC вовне построены квадраты $ABDE$ и $ACFG$. Прямая AG пересекает отрезок BD в точке X, прямая AE пересекает отрезок CF в точке Y. Докажите, что окружности (DGX) и (FEY) пересекаются в точке Болтая.

Шалтай или Болтай

6. Внешняя биссектриса угла A треугольника ABC пересекает прямую BC в точке D, а окружность (ABC) — в точке A_1. Точки I и I_a — центры вписанной и вневписанной окружности, касающейся BC, соответственно. Докажите, что $DI \perp A_1I_a$.

7. На стороне BC треугольника ABC отмечены такие точки P и Q, что $\angle PAB = \angle ACB$ и $\angle QAC = \angle ABC$. Точки M и N таковы, что точки P и Q являются серединами отрезков AM и AN соответственно. Отрезки BM и CN пересекаются в точке X. Докажите, что X лежит на (ABC).

8. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, точка F на отрезке BC такова, что $BL = CF$. Серединный перпендикуляр к стороне BC пересекает описанную окружность треугольника BIC в точках D и E. Докажите, что точки A, D, F, E лежат на одной окружности.

9. (*Устный тур Тургора 2025*) Дан треугольник ABC. Пусть CL — его биссектриса, W — середина дуги BCA, а P — проекция ортоцентра на медиану,

проведённую из вершины C. Окружность (CPW) пересекает прямую, проходящую через C и параллельную AB, в точке Q. Докажите, что $LC = LQ$.

Касание

1. Точка I — центр вписанной окружности ω треугольника ABC. Окружности, проходящие через точки B и C и касающиеся прямой AI в точке I, повторно пересекают стороны AB и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что PQ касается ω.

2. Пусть A_0 — середина стороны BC треугольника ABC, а A' — точка касания с этой стороной вписанной окружности. Построим окружность ω_a с центром в A_0 и проходящую через A'. На других сторонах построим аналогичные окружности. Докажите, что если ω_a касается описанной окружности треугольника ABC на дуге BC, не содержащей A, то ещё одна из построенных окружностей касается описанной окружности.

3. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c, ℓ_d — биссектрисы соответствующих внешних углов этого четырёхугольника. Прямые ℓ_a и ℓ_b пересекаются в точке K, прямые ℓ_b и ℓ_c — в точке L, прямые ℓ_c и ℓ_d — в точке M, прямые ℓ_d и ℓ_a — в точке N. Докажите, что если окружности, описанные около треугольников ABK и CDM, касаются внешним образом, то и окружности, описанные около треугольников BCL и DAN, касаются внешним образом.

4. Пусть AD — биссектриса неравнобедренного треугольника ABC, и прямая ℓ касается окружностей, описанных около треугольников ADB и ADC в точках M и N соответственно. Докажите, что окружность, проходящая через середины отрезков BD, DC и MN, касается прямой ℓ.

5. На продолжении стороны AD прямоугольника $ABCD$ за точку D выбрана точка E. Луч EC вторично пересекает окружность ω, описанную около треугольника ABE, в точке F. Лучи AF и DC пересекаются в точке P. На прямую, проходящую через точку E параллельно прямой AF, опущен перпендикуляр CH. Докажите, что прямая PH касается окружности ω.

6. Окружность ω касается равных сторон AB и AC равнобедренного треугольника ABC и пересекает его основание BC в точках M и N. Отрезок AM вторично пересекает ω в точке X. Точки P и Q симметричны M относительно точек B и C. Докажите, что описанная окружность треугольника PQX касается ω.

7. Остроугольный треугольник ABC ($AB < AC$) вписан в окружность Ω. Пусть M — точка пересечения его медиан, а AH — высота этого треугольника. Луч MH пересекает Ω в точке A'. Докажите, что окружность, описанная около треугольника $A'HB$, касается AB.

Заключительный разнобой

1. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC выбраны точки P, Q, R соответственно таким образом, что $AP = CQ$ и четырехугольник $RPBQ$ вписанный. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках A и C пересекают прямые RP и RQ в точках X и Y соответственно. Докажите, что $RX = RY$.

2. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ не является вписанным. Внутри него отмечена такая точка X, что $\angle BAC = \angle CDX$, $\angle DAC = \angle CBX$. Докажите, что $\angle BCA = \angle XCD$.

3. Окружность ω касается сторон угла BAC в точках B и C. Прямая ℓ пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно. Окружность ω пересекает ℓ в точках P и Q. Точки S и T выбраны на отрезке BC так, что $KS \parallel AC$ и $LT \parallel AB$. Докажите, что точки P, Q, S и T лежат на одной окружности.

4. В равнобедренном треугольнике ABC на основании BC отмечена такая точка D,что $BD = 2CD$. На отрезке AD отметили такую точку E, что $\angle BAC = \angle BED$. Докажите, что $\angle BED = 2\angle CED$.

5. На стороне AB остроугольного треугольника ABC отмечена точка D, а на продолжении стороны BC за точку C — точка E. Оказалось, что прямая, проходящая через E и параллельная AB, касается окружности, описанной около треугольника ADC. Докажите, что одна из касательных, проведённых из точки E к описанной окружности треугольника BCD, отсекает от угла ABE треугольник, подобный треугольнику ABC.

3 Комбинаторика

Оценка + пример

1. Среди $2n+1$ человека есть $n+1$ рыцарь и n лжецов. За одно действие мы можем выбрать двух различных человек X и Y, и спросить у X, верно ли, что Y — рыцарь. За какое наименьшее количество действий можно гарантированно определить «роль» хотя бы одного человека?

2. На окружности отмечено 1000 точек, каждая окрашена в один из k цветов. Оказалось, что среди любых пяти попарно пересекающихся отрезков, концами которых являются 10 различных отмеченных точек, найдутся хотя бы три отрезка, у каждого из которых концы имеют разные цвета. При каком наименьшем k это возможно?

3. На железнодорожной трассе Москва-Владивосток 200 станций. Требуется запустить несколько маршрутов так, чтобы для любых двух станций нашёлся маршрут, который останавливается в них, но не останавливается между ними. Каким наименьшим количеством маршрутов можно обойтись?

4. Пусть $2S$ — суммарный вес некоторого набора гирек. Назовем натуральное число k *средним*, если в наборе можно выбрать k гирек, суммарный вес которых равен S. Какое наибольшее количество средних чисел может иметь набор из 100 гирек?

5. В межгалактической гостинице есть 100 комнат вместимостью $101, 102, \ldots, 200$ человек. В этих комнатах суммарно живёт n человек. В гостиницу приехал VIP-гость, для которого нужно освободить комнату. Для этого директор гостиницы выбирает одну комнату и переселяет всех её жителей в одну и ту же другую комнату. При каком наибольшем n директор гостиницы всегда может таким образом освободить комнату независимо от текущего расселения?

6. В некоторых клетках квадрата 200×200 стоит по одной фишке – красной или синей; остальные клетки пусты. Одна фишка видит другую, если они находятся в одной строке или одном столбце. Известно, что каждая фишка видит ровно пять фишек другого цвета (и, возможно, некоторое количество фишек своего цвета). Найдите наибольшее возможное количество фишек.

7. В пустой отель приехали 100 туристов. Они знают, что в отеле есть одноместные номера $1, 2, \ldots, n$, из которых k на ремонте (неизвестно какие). Туристы могут заранее договориться о своих действиях, после чего по очереди уходят заселяться: каждый проверяет номера в любом порядке, находит первый свободный номер не на ремонте и остаётся там. Для каждого k укажите наименьшее n, при котором туристы гарантированно смогут заселиться, без попыток заселиться в уже занятые номера

8. Имеется 1000 яблок. Известно, что как бы их не раскладывали на 10 мешков по 100 яблок, обязательно найдутся два мешка с одинаковой массой. Для какого наибольшего k можно утверждать, что есть k яблок с одинаковой массой?

Клеточная комбинаторика

1. Какое максимальное число печенек можно разложить по клеткам таблицы 12×12 со следующими условиями:

- в каждой клетке должно лежать не более одной печеньки;
- количество печенек в каждой строке, столбце или диагонали должно быть чётным?

(Каждая диагональ параллельна одной из главных диагоналей и состоит из $1, 2, \ldots, 11$ или 12 клеток).

2. В квадрате 2021×2021 закрасили главную диагональ, а также все клетки под ней. Сколько существует способов разрезать по линиям сетки закрашенную часть квадрата на 2021 различный прямоугольник?

3. Из клетчатого квадрата 55×55 вырезали по границам клеток 400 трёхклеточных уголков (повёрнутых как угодно) и ещё **(а)** 550 клеток; **(б)** 500 клеток. Докажите, что какие-то две вырезанные фигуры имеют общий отрезок границы.

4. Дано натуральное число k. На клетчатой плоскости изначально отмечено N клеток. Назовём крестом клетки A множество всех клеток, находящихся в одной вертикали или горизонтали с A. Если в кресте, неотмеченной клетки A отмечено хотя бы k других клеток, то клетку A также можно отметить. Оказалось, что цепочкой таких действий можно отметить любую клетку плоскости. При каком наименьшем N это могло случиться?

5. Из клетчатого бумажного квадрата 100×100 вырезали по границам клеток 1950 двуклеточных прямоугольников. Докажите, что из оставшейся части можно вырезать по границам клеток T-тетраминошку возможно, повёрнутую. (Если такая фигурка уже есть среди оставшихся частей, считается, что её получилось вырезать.)

6. В клетчатой таблице $n \times n$ $(n > 4)$ поставлены n знаков $+$ в клетках одной диагонали и знаки $-$ во всех остальных клетках. Разрешается в некоторой строке или в некотором столбце поменять все знаки на противоположные. Докажите, что после любого количества таких операций в таблице останется не менее n плюсов.

7. Восемь клеток одной диагонали шахматной доски назовем забором. Ладья ходит по доске, не наступая на одну и ту же клетку дважды и не наступая на клетки забора (промежуточные клетки не считаются посещенными). Какое наибольшее число прыжков через забор может совершить ладья?

8. В некоторых клетках доски 100×100 стоит по фишке. Назовём клетку красивой, если в соседних с ней по стороне клетках стоит чётное число фишек. Может ли ровно одна клетка доски быть красивой?

Процессы

1. По кругу стоят буквы A и B, всего 41 буква. Можно заменять ABA на B и наоборот, а также BAB на A и наоборот. Верно ли, что из любого начального расположения можно получить такими операциями круг, на котором стоит ровно одна буква?

2. Круг разбит на 2025 секторов, пронумерованных числами $1, 2, \ldots, 2025$ по часовой стрелке. В каждом секторе изначально сидит один таракан. За ход разрешается делать одну из двух операций:

- переместить всех тараканов из сектора с номером 1 в сектор с номером 2;
- переместить вообще всех тараканов в круге в следующий по часовой стрелке сектор.

(а) Все тараканы собрались в одном секторе. Какое наименьшее число операций второго вида могло быть сделано?
(б) За какое минимальное число действий можно всех тараканов собрать в одном секторе?

3. На бесконечном листе клетчатой бумаги N клеток окрашено черный цвет. Докажите, что из этого листа можно вырезать конечное число клетчатых квадратов так, что будут выполняться два условия:

- все черные клетки лежат в вырезанных квадратах;
- в любом вырезанном квадрате K площадь черных клеток составит не менее $1/5$ и не более $4/5$ площади K.

4. Игорь написал на доске числа $1, 2, 3, \ldots, 100$, именно в таком порядке. Раз в минуту Паша отсчитывает $2k$ чисел с начала ряда при некотором целом k и следующие за ними четыре числа a, b, c, d меняет на два числа $ac+bd$ и $ad+bc$ в любом порядке. Через 49 минут на доске остались 2 числа. Докажите, что они не зависят от порядка действий.

5. Дан отрезок $[0; 1]$. За ход разрешается разбить любой из имеющихся отрезков точкой на два новых отрезка и записать на доску произведение длин этих двух новых отрезков. Докажите, что ни в какой момент сумма чисел на доске не превысит $1/2$.

6. Изначально на доске написано натуральное число. Если на доске уже есть число a, то разрешается дописать на нее число $2a+1$ или $\frac{a}{a+2}$. После нескольких таких операций оказалось, что на доске есть число 2024. Докажите, что оно там находилось изначально.

7. Последовательность задана рекуррентной формулой $x_{n+1} = [x_n]\{x_n\}$. Докажите, что последовательность периодична (возможно,с предпериодом), если x_1

(а) положительное, **(б)** произвольное.

8. По кругу расставлено несколько коробочек. В каждой из них может лежать один или несколько шариков (или она может быть пустой). Ход состоит в том, что из какой-то коробочки берутся все шарики и раскладываются по одному, двигаясь по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки. На каждом ходу разрешается брать шарики из любой коробочки. Верно ли, что за несколько ходов из любого начального расположения шариков по коробочкам можно получить любое другое?

Графы

1. В группе школьников любые двое имеют ровно одного общего знакомого из этой группы. Может ли эта группа состоять из 2025 школьников?

2. На симпозиум приехали 100 человек. Из них 15 французов, каждый из которых знаком хотя бы с 70 участниками симпозиума, и 85 немцев, каждый из которых знаком не более, чем с 10 участниками. Их расселили в 21 комнату. Докажите, что в какой-то из комнат ни одной пары знакомых.

3. В полном графе хотя бы 3 вершины, причём каждое ребро покрашено в один из двух цветов. Докажите, что в этом графе существует циклический маршрут, проходящий по всем вершинам ровно по 1 разу, такой, что смена цвета по пути маршрута происходит не более одного раза.

4. В классе учатся 30 человек. Учитель знает, что среди любых 7 из них есть по крайней мере 2 друга. Докажите, что учитель может их выставить не более чем в 6 шеренг так, чтобы каждые два человека из одной шеренги, стоящие рядом, были друзьями (в шеренге может стоять всего один человек).

5. В графе $2 \cdot 10^6$ вершин, при этом известно, что среди любых 2000 вершин в этом графе найдётся треугольник. Докажите, что в этом графе найдётся клика из 4 вершин.

6. В стране $3k + 1$ город, любые два из которых соединены дорогой. Все дороги делятся на 3 вида, причём из каждого города выходит по k дорог каждого вида. Назовём четвёрку городов хорошей, если в этой четвёрке есть ровно один город, все три дороги из которого в остальные города четвёрки имеют разные типы. Докажите, что количество хороших четвёрок чётно.

7. В графе степень каждый вершины не меньше 2024. Каждое ребро этого графа было покрашено в один из двух цветов. Докажите, что в этом графе существует простой одноцветный цикл, в котором не менее 508 вершин.

Алгоритмы

1. На 22 карточках записали натуральные числа от 1 до 22. Затем эти карточки перевернули и расположили по кругу. Грише разрешается узнать сумму на любых двух соседних карточках или сумму на любых двух диаметрально противоположных карточках. Может ли Гриша гарантированно узнать число на каждой из карточек?

2. Паша написал на 10 карточках различные натуральные числа и перевернул все карточки. За ход Гриша может указать на три карточки, Паша в ответ назовёт ему число, которое записано на какой-то из этих карточек. Может ли Гриша за несколько ходов гарантированно определить число на какой-то из карточек?

3. Если в детектор фальшивых монет опустить 5 монет весом a, b, c, d, e граммов, где $a < b < c < d < e$, то он, пожужжав, сбросит монеты весом b и c граммов в правую чашу, а остальные монеты — в левую. Есть 2025 монет попарно различных по весу. Они пронумерованы и легко различаются по внешнему виду. Можно ли при помощи детектора гарантированно определить самую легкую монету?

4. Заяц загадал 10 натуральных чисел. Волк за один ход называет 10 коэффициентов (тоже натуральные числа), а Заяц в ответ называет результат линейной комбинации своих чисел с коэффициентами Волка, при этом Заяц сам выбирает какое число умножать на какой коэффициент. За какое наименьшее число ходов Волк гарантированно может узнать все числа Зайца?

5. Волк изготовил 90 фальшивых монет весом 9 грамм каждая. Случайно он к ним добавил 10 настоящих монет весом по 10 грамм каждая. Все монеты перемешаны и неотличимы друг от друга. У него есть весы, на которых можно взвесить любое количество монет, но они показывают либо точный вес, либо вес, на 1 грамм больший истинного. Может ли Волк с помощью этих весов с гарантией найти хотя бы одну фальшивую монету?

6. В тайном клубе состоят n человек, которые образовали n тайных обществ по три человека в каждом. Докажите, что можно арестовать $[n/3]$ человек так, чтобы в любом тайном обществе остался бы неарестованный.

7. Пять одинаковых пустых ведер ёмкостью 2 литра расположены по кругу. Заяц и Волк ходят по очереди: Волк на своем ходу набирает из реки один литр воды и распределяет эту воду по ведрам. Заяц на своем ходу выбирает пару соседних ведер и полностью опустошает их. Начинает Волк, его цель — переполнить одно из пяти вёдер. Цель Зайца – предотвратить это. Может ли Волк гарантированно выиграть за конечное число ходов?

8. У Димы есть 100 камней, никакие два из которых не равны по массе, Также у него есть странные двухчашечные весы, на каждую чашку которых можно

класть ровно 10 камней. Назовем пару камней ясной, если Дима может выяснить, какой из камней в этой паре тяжелее. Каково наименьшее возможное количество ясных пар?

Комбинаторный разнобой

1. На чемпионате мира по скоростному решению задач участвовало 14 человек, причём каждую из предложенных задач решило ровно 6 участников. Оказалось, что для любых двух задач найдутся не меньше 4 и не больше 5 участников, которые решили обе эти задачи.
(а) Могла ли эта олимпиада состоять из 45 задач?
(б) А из 49 задач?

2. Рассмотрим последовательность чисел $1, 2, 12, 212, 12212, 21212212\ldots$ Каждое число, начиная с третьего, в этой последовательности определяется, как «склеивание» двух предыдущих. Может ли в этой последовательности в какой-то момент появиться «периодическое» число? Число называется периодическим, если оно состоит из нескольких (больше одного) одинаковых чисел, записанных подряд.

3. На плоскости отметили конечное число точек. Любые три точки можно накрыть треугольником площади 1. Обязательно ли все точки можно накрыть треугольником площади 4.

4. Алиса и Боб играют на доске 6×6. Игроки ходят по очереди, начинает Алиса, на каждом ходу игрок ставит рациональное число в пустую клетку доски (нельзя использовать число, которое уже есть на доске). Когда во всех клетках появятся числа, то в каждой строке клетка с наибольшим числом красится в черный цвет. Алиса выигрывает, если по черным клеткам можно построить путь с первой на последнюю строку, иначе побеждает Боб (путь строится по соседним по стороне или вершине клеткам). Кто выигрывает при правильной игре?

5. У Гриши есть n камней, причём каждый камень весит хотя бы 1. Сумма весов всех камней равна s, причём $s \leqslant 2n$. Докажите, что для любого действительного r такого, что $0 \leqslant r \leqslant s$, найдется несколько камней, у которых сумма весов хотя бы r, но не больше, чем $r + 2$.

6. Дано натуральное число $n \geqslant 2$. В ряд в некотором порядке выстроены $n(n+1)$ человек, причем никакие двое из них не имеют одинаковый рост. Докажите, что можно убрать $n(n-1)$ из них так, чтобы в оставшемся ряду из $2n$ людей между двумя самыми высокими никого не было, между третьим и четвёртым по росту — никого не было, ..., между двумя самыми низкими — также никого не было.

7. Внутри выпуклого 100-угольника дана точка X, не лежащая ни на одной его стороне или диагонали. Исходно вершины многоугольника не отмечены. Петя и Вася по очереди отмечают ещё не отмеченные вершины 100-угольника, причём Петя начинает и первым ходом отмечает сразу две вершины, а далее каждый своим очередным ходом отмечает по одной вершине. Проигрывает тот, после чьего хода точка X будет лежать внутри многоугольника с отмеченными вершинами. Кто выигрывает при правильной игре?

Добавка по графам

1. В компании 100 человек, каждый из которых знаком ровно с 40 другими. Докажите, что можно выбрать четырех человек A, B, C, D так, что A и B будут знакомы друг с другом, C и D тоже будут знакомы, но при этом A и D будет незнакомы друг с другом и, кроме этого, B и C тоже будут незнакомы.

2. На олимпиаду приехало 100 учеников, некоторые из которых знакомы. Оказалось, что у любых двух незнакомых найдётся хотя бы семь общих знакомых. Докажите, что можно выбрать группу из хотя бы 14 учеников и рассадить их за круглый стол так, чтобы каждый был знаком со своими соседями.

3. Каждые два из 21 города соединены прямым рейсом одной из четырех авиакомпаний. Докажите, что существует замкнутый маршрут из четырех рейсов одной авиакомпании.

4. Дан связный граф на 2025 вершинах. Докажите, что в нем можно выделить 2024 ребер и расставить на них стрелки так, чтобы для любых двух вершин, соединенных ребром в исходном графе, из одной из них в другую можно было пройти по стрелкам.

Часть II

Группа 9–2

1 Алгебра

Квадратные трёхчлены

1. Числа $b > 0$ и a таковы, что квадратный трехчлен $x^2 + ax + b$ имеет два различных корня, ровно один из которых лежит на отрезке $[-1, 1]$. Докажите, что ровно один из этих корней лежит в интервале $(-b; b)$.

2. Приведённые квадратные трёхчлены $P(x)$ и $Q(x)$ таковы, что уравнения

$$P(Q(x)) = 0 \quad \text{и} \quad Q(P(x)) = 0$$

не имеют вещественных корней. Докажите, что хотя бы одно из уравнений $P(P(x)) = 0$ и $Q(Q(x)) = 0$ тоже не имеет вещественных корней.

3. Верно ли, что для любых трёх различных натуральных чисел a, b, c найдётся квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами и положительным старшим коэффициентом, принимающий в некоторых целых точках значения a^3, b^3, c^3?

4. Сколькими способами можно разбить множество чисел $1, 2, 4, \ldots, 2^{2025}$ на два непустых множества A и B, так чтобы уравнение $x^2 - S(A)x + S(B) = 0$ имело целый корень? Здесь за $S(M)$ обозначена сумма чисел множества M.

5. Квадратный трёхчлен $P(x)$ разрешается заменить на один из трёхчленов

$$x^2 P\left(\frac{1}{x} + 1\right) \quad \text{или} \quad (x-1)^2 P\left(\frac{1}{x-1}\right).$$

Можно ли с помощью таких операций из квадратного трёхчлена $x^2 + 4x + 3$ получить трёхчлен $x^2 + 10x + 9$?

6. Среди квадратных трехчленов $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ нет равных и противоположных. Может ли оказаться, что уравнение $|P(x)| = |Q(x)| = |R(x)|$ имеет четыре различных действительных решения?

7. Дан квадратный трёхчлен $P(x)$. Докажите, что найдутся квадратные трёхчлены $Q(x)$ и $R(x)$, такие что $P(x)P(x+1) = Q(R(x))$.

8. Артём Рустамович выбрал 199 квадратных трёхчленов с вещественными коэффициентами так, что сумма любых ста из них имеет вещественный корень. Докажите, что сумма каких-то девяти из них также имеет вещественный корень.

Неприводимые многочлены

Определение. Многочлен с коэффициентами в $\mathbb{K}$ называется *приводимым* над $\mathbb{K}$, если его можно представить в виде произведения двух многочленов ненулевой степени с коэффициентами в $\mathbb{K}$. В противном случае многочлен называется *неприводимым*.

Определение. Пусть $\mathbb{K}$ равно $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. *Наибольшим общим делителем* двух многочленов называется многочлен, который делит данные многочлены и кратен их любому другому общему делителю.

1. **Лемма Гаусса.**
(а) Многочлен с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ называется *примитивным*, если его коэффициенты взаимно просты в совокупности. Докажите, что произведение двух примитивных многочленов — примитивный многочлен.
(б) Докажите, что многочлен с целыми коэффициентами приводимый в $\mathbb{Q}$ приводим и в $\mathbb{Z}$.

2. Многочлен $P^*(x)$ называется *взаимным* по отношению к многочлену $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, если его коэффициенты расположены в обратном порядке: $P^*(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$. Докажите, что многочлен с рациональными коэффициентами и $a_0 \neq 0$ неприводим над $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда неприводим его взаимный.

3. **(а)** Воспользовавшись аналогом алгоритма Евклида для многочленов, докажите, что НОД многочленов существует и единственен с точностью до умножения на константу.
(б) Сформулируйте и докажите аналог теоремы Безу про НОД для многочленов.
(в) У двух многочленов, неприводимых над $\mathbb{Q}$, нашёлся общий вещественный корень. Докажите, что эти многочлены отличаются друг от друга умножением на константу.

4. **Критерий Эйзенштейна.** Пусть $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что существует такое простое число p, что a_i кратно p при $i = 0, 1, \ldots, n-1$, a_0 и a_n не кратны p. Докажите, что $P(x)$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

5. Докажите, что следующие многочлены неприводимы над $\mathbb{Q}$:
(а) $2x^4 - 4x^2 + 8x + 1$,
(б) $(x+1)^p + p - 1$,
(в) $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n) - 1$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные целые числа,
(г) $x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$, где p — некоторое простое число,
(д) $x^n + 5x^{n-1} + 3$.

6. Неприводимый над $\mathbb{Z}$ многочлен $P(x)$ имеет два вещественных корня, дающих в произведении 1. Докажите, что $P(x)$ имеет чётную степень.

7. Многочлен с целыми коэффициентами степени n принимает в некоторых n различных целых точках значения, отличные от нуля и по модулю меньшие, чем $\frac{m!}{2^m}$, где $m = n - [\frac{n}{2}]$. Докажите, что он неприводим над $\mathbb{Z}$.

8. Рациональное число x таково, что $\cos(\pi x)$ так же является рациональным. Докажите, что $\cos(\pi x) \in \{0, \pm 1, \pm \frac{1}{2}\}$.

ТЧ разнобой

1. Назовём *главными делителями* составного числа n два наибольших его натуральных делителя, отличных от n. Составные натуральные числа a и b таковы, что главные делители числа a совпадают с главными делителями числа b. Докажите, что $a = b$.

2. Пусть p — нечетное простое число и a, b, c — такие целые числа, что $a^{2023}+b^{2023}$, $b^{2024} + c^{2024}$, $c^{2025} + a^{2025}$ делятся на p. Докажите, что a, b, c делятся на p.

3. Самый лучший преподаватель Сергей[2] изучает делители чисел. Для каждого натурального числа n он находит наибольший его делитель d, меньший $\sqrt{n}$. После этого он выписывает на доску число $\frac{n}{d} - d$. Докажите, что любое число k рано или поздно окажется на доске.

4. Существуют ли попарно различные натуральные числа $a_1, \ldots a_{100}$, одновременно удовлетворяющие следующим условиям:

1. число $a_1 a_2 \ldots a_{100}$ делится на $a_i + a_j$ при всех $1 \leqslant i < j \leqslant 100$;
2. для каждого $k = 1, 2, ..., 100$ найдутся индексы i, j такие, что $1 \leqslant i < j \leqslant 100$ и число $a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_{k+1} \ldots a_{99} a_{100}$ не делится на $a_i + a_j$?

5. Решите уравнение в натуральных числах $x \cdot y! + 2y \cdot x! = z!$.

6. Даны натуральные числа a и b. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что число $a^n + 1$ **не** делится на $n^b + 1$.

7. Данил Евгеньевич выбрал натуральное число $N > 1$ и выписал в строчку в порядке возрастания все его натуральные делители: $d_1 < \ldots < d_s$ (так что $d_1 = 1$ и $d_s = N$). Затем для каждой пары стоящих рядом чисел он вычислил их наибольший общий делитель; сумма полученных $s - 1$ чисел оказалась равной $N - 2$. Какие значения могло принимать N?

8. Докажите, что не существует целого числа, чей куб можно представить в виде $y^2 + 108$.

9. Целые числа m, n таковы, что $m > 20$ и $n > 1$, причём $n^2 | m$. Докажите, что существуют натуральные числа x, y, z, такие что $n = xy + xz + yz$.

[2] По версии большой языковой модели DeepSeek

Метаразнобой

1. Можно ли при каком-то натуральном k разбить все натуральные числа от 1 до k на две группы и выписать числа в каждой группе подряд в некотором порядке так, чтобы получились два одинаковых числа?

2. Дана бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots$, в которой нет двух равных членов. Отрезок $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+m-1}$ этой последовательности назовём *монотонным отрезком длины* m, если выполнены неравенства $a_i < a_{i+1} < \ldots < a_{i+m-1}$ или неравенства $a_i > a_{i+1} > \ldots > a_{i+m-1}$. Оказалось, что для каждого натурального k член a_k содержится в некотором монотонном отрезке длины $k+1$. Докажите, что существует натуральное N, начиная с которого последовательность монотонна до бесконечности.

3. Докажите, что при $N \geqslant 6$ не существует последовательности целых положительных чисел $\{a_n\}$, $n = 1, \ldots, N$, такой что для каждого $1 \leqslant n \leqslant N-2$ выполняется соотношение $a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1}} + a_n$.

4. В республике математиков выбрали число $\alpha > 2$ и выпустили монеты достоинствами в 1 рубль, а также в α^k рублей при каждом натуральном k. При этом α было выбрано так, что достоинства всех монет, кроме самой мелкой, иррациональны. Могло ли оказаться, что любую сумму в натуральное число рублей можно набрать этими монетами, используя монеты каждого достоинства не более 6 раз?

5. Пусть n — некоторое d-значное натуральное число, не делящееся на 10. Выписав цифры числа n в обратном порядке, получили число m. Может ли десятичная запись произведения nm состоять только из цифр «8», если
(а) $d = 9998$; **(б)** $d = 9999$?

6. Найдите все пары положительных вещественных чисел (a, b), таких что $[a[bn]] = n - 1$ для любого натурального n.

7. Рассмотрим все 100-значные числа, делящиеся на 19. Докажите, что количество таких чисел, не содержащих цифр 4, 5 и 6, равно количеству таких чисел, не содержащих цифр 1, 4 и 7.

Постметаразнобой

1. Вещественные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ лежат в отрезке $[-1, 1]$ и в сумме дают 0. Докажите, что эти числа можно выписать в некотором порядке $y_1, y_2, \ldots, y_n$ так, что для любых $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ будет верно $|y_i + y_{i+1} + \ldots + y_j| \leqslant 2$.

2. На прямой отмечено $n+1$ различных отрезков; одна из точек прямой принадлежит всем этим отрезкам. Докажите, что среди отмеченных отрезков можно выбрать различные отрезки I и J, пересекающиеся по отрезку длины, не меньшей $d\,\frac{n-1}{n}$, где d — длина отрезка I.

3. Несколько путников движутся с постоянными скоростями по прямолинейной дороге. Известно, что в течение некоторого периода времени сумма попарных расстояний между ними монотонно уменьшалась. Докажите, что в течение того же периода сумма расстояний от некоторого путника до всех остальных тоже монотонно уменьшалась.

4. Вещественные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таковы, что выполнено $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$ и $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Обозначим за $X = \max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и за $Y = \min(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Докажите, что при $n \geqslant 3$ выполняется $XY \leqslant -\frac{1}{n}$.

5. Положительные вещественные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и вещественное число s таковы, что $x_1+x_2+\ldots+x_n = 3s$, $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 = 3s^2$ и $x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3 > 3s^3+s$. Докажите, что какие-то два числа из множества $x_1, x_2, \ldots, x_n$ отличаются больше, чем на 1.

2 Геометрия

Равенство отрезков

1. Внутри треугольника ABC отметили такую точку P, что $\angle ABP = \angle CPM$, где M — середина отрезка AC. Прямая PM повторно пересекает описанную окружность треугольника APB в точке Q. Докажите, что $AQ = CP$.

2. На одной стороне угла с вершиной O взята точка A, а на другой — точки B и C, причём точка B лежит между O и C. Проведена окружность с центром O_1, вписанная в треугольник OAB, и окружность с центром O_2, касающаяся стороны AC и продолжений сторон OA и OC треугольника AOC. Докажите, что если $O_1A = O_2A$, то треугольник ABC — равнобедренный.

3. Пусть I и O —– центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC соответственно. Точки P и Q таковы, что $AIOP$ и $BIOQ$ — равнобокие трапеции ($AI \parallel OP$, $BI \parallel OQ$). Докажите, что $CP = CQ$.

4. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту AH и медиану AM. На сторонах AB и AC отметили точки X и Y такие, что $AX = XC$ и $AY = YB$. Докажите, что середина XY равноудалена от H и M.

5. Окружность ω касается сторон AB и AC треугольника ABC. Окружность Ω касается стороны AC и продолжения стороны AB за точку B, а также касается ω в точке L, лежащей на стороне BC. Прямая AL вторично пересекает ω и Ω в точках K и M соответственно. Оказалось, что $KB \parallel CM$. Докажите, что треугольник LCM равнобедренный.

6. Окружность Ω с центром в точке O описана около остроугольного треугольника ABC, в котором $AB < BC$; его высоты пересекаются в точке H. На продолжении отрезка BO за точку O отмечена точка D такая, что $\angle ADC = \angle ABC$. Прямая, проходящая через точку H параллельно прямой BO, пересекает меньшую дугу AC окружности Ω в точке E. Докажите, что $BH = DE$.

7. В треугольнике ABC отмечены середины сторон BC, AB и AC — точки D, E и F соответственно. Пусть M — точка пересечения биссектрисы угла ADB и стороны AB, а N — точка пересечения биссектрисы угла ADC и стороны AC. Также пусть S — точка пересечения AD и MN, P — точка пересечения AB и FS, а R — точка пересечения AC и ES. Докажите, что $PR = AD$.

Коллинеарность

1. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) отмечены середины X и Y сторон AB и AC соответственно. Точка Z — основание перпендикуляра из B на прямую CX. Докажите, что центр описанной окружности треугольника XYZ лежит на прямой AC.

2. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Окружность ω, проходящая через вершины B и C, вторично пересекает сторону AB и диагональ BD в точках X и Y соответственно. Касательная, проведённая к окружности ω в точке C, пересекает луч AD в точке Z. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой.

3. Пусть ABC — остроугольный треугольник. Точки D и E на сторонах AB и AC соответственно таковы, что прямые BC и DE параллельны. Пусть X — внутренняя точка четырёхугольника $BCED$. Лучи DX и EX пересекают отрезок BC в точках P и Q соответственно. Описанные окружности треугольников BQX и CPX вторично пересекаются в точке Y. Докажите, что точки A, X и Y лежат на одной прямой.

4. Биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекают его описанную окружность Ω в точках B_1 и C_1 соответственно. Окружность ω_1 с центром B_1 касается AC, окружность ω_2 с центром C_1 касается AB.
(а) Докажите, что центр вписанной в треугольник ABC окружности лежит на одной из общих внешних касательных к окружностям ω_1 и ω_2.
(б) Докажите, что окружности Ω, ω_1 и ω_2 имеют общую касательную.

5. В треугольнике ABC отметили ортоцентр H, середину M стороны BC, а также провели высоту AD. Точка P плоскости такова, что $HMPD$ — параллелограмм. Окружность с центром в P, проходящая через точки B и C, повторно пересекает AB и AC в точках X и Y. Докажите, что точки D, X, Y лежат на одной прямой.

6. Дана трапеция $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, а лучи AB и DC пересекаются в точке G. Общие внешние касательные к окружностям, описанным около треугольников ABC и ACD, пересекаются в точке E. Общие внешние касательные к окружностям, описанным около треугольников ABD и BCD, пересекаются в точке F. Докажите, что точки E, F и G лежат на одной прямой.

Добавка

1. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω, а его диагонали пересекаются в точке K. Точки M_1, M_2, M_3, M_4 — середины дуг AB, BC, CD, DA (не содержащих других вершин четырехугольника) соответственно. Точки I_1, I_2, I_3, I_4 — центры окружностей, вписанных в треугольники ABK, BCK, CDK, DAK соответственно. Докажите, что прямые M_1I_1, M_2I_2, M_3I_3, M_4I_4 пересекаются в одной точке.

2. В треугольник ABC вписана окружность ω, касающаяся стороны BC в точке K. Окружность ω' симметрична окружности ω относительно точки A. Точка A_0 выбрана так, что отрезки BA_0 и CA_0 касаются ω'. Пусть M — середина стороны BC. Докажите, что прямая AM делит отрезок KA_0 пополам.

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы B и D равны $120°$. Точки A', B', C' симметричны D относительно BC, CA, AB соответственно. Докажите, что прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

Точка Шалтая

Точкой Шалтая треугольника ABC со стороны вершины A назовём такую точку Ш, что

$$\angle BA\text{Ш} = \angle CB\text{Ш} \quad \text{и} \quad \angle CA\text{Ш} = \angle BC\text{Ш}.$$

В остроугольном треугольнике ABC

- H — точка пересечения высот AA_1, BB_1, CC_1;
- M — середина стороны BC;
- D — точка пересечения прямых BC и B_1C_1;
- E — точка, симметричная H относительно BC;
- L — пересечение симедианы из вершины A с (ABC).

1. **(а)** Докажите, что Ш лежит на AM.
(б) Докажите, что Ш лежит на (BHC).
(в) Докажите, что Ш — проекция H на AM.
(г) Докажите, что Ш и L симметричны относительно BC.
(д) Докажите, что $\text{Ш}B/\text{Ш}C = AB/AC$.
(е) Докажите, что четырёхугольники $BC_1\text{Ш}M$ и $B_1C\text{Ш}M$ вписанные.
(ж) Докажите, прямая HШ проходит через точку D.

Упражнение. Пусть Ш$'$ — точка Шалтая треугольника BHC со стороны вершины H. Нарисуйте для неё все факты задачи 1 (кроме (г)).

2. Докажите, что Ш$'$, A_1, L лежат на одной прямой.

3. Докажите, что B_1, C_1, L и E лежат на одной окружности.

4. Докажите, что A, M, E, D лежат на одной окружности.

5. Докажите, что окружность (ADH) проходит через середину отрезка B_1C_1.

6. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки C' и B' соответственно так, что $\angle AC'C = \angle CB'B$. Докажите, что описанная окружность треугольника $AB'C'$ проходит через Ш.

7. На продолжениях высот BB_1 и CC_1 выбраны точки X и Y соответственно так, что $AXHY$ — параллелограмм. Докажите, что точка Ш лежит на окружности (XHY).

8. Касательная к (ABC) в точке Ш$'$ пересекает прямую BC в точке X. Докажите, что $XH = X\text{Ш}'$.

Точка Болтая

Точкой Болтая треугольника ABC со стороны вершины A назовём такую точку Б, что

$$\angle BA\text{Б} = \angle AC\text{Б} \quad \text{и} \quad \angle CA\text{Б} = \angle AB\text{Б}.$$

Несложно видеть, что лежит на (BOC).

1. **(а)** Докажите, что Б — это проекция O на симедииану.
(б) Докажите, что Б и Ш изогонально сопряжены.

2. В треугольнике ABC провели высоту AH и отметили точку M — середину стороны AB. Докажите, что описанная окружность треугольника BMH проходит через точку Болтая со стороны вершины A.

3. Касательная к описанной окружности треугольника ABC, проведённая в точке A, пересекает прямую BC в точке D. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что прямая OD проходит через точку Болтая со стороны вершины A.

4. В треугольнике ABC провели высоту AD и отметили середины M и N отрезков AB и AC. Докажите, что прямая, проходящая через D и точку Болтая со стороны вершины A, делит отрезок MN пополам.

5. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC вовне построены квадраты $ABDE$ и $ACFG$. Прямая AG пересекает отрезок BD в точке X, прямая AE пересекает отрезок CF в точке Y. Докажите, что окружности (DGX) и (FEY) пересекаются в точке Болтая.

Шалтай или Болтай

6. Внешняя биссектриса угла A треугольника ABC пересекает прямую BC в точке D, а окружность (ABC) — в точке A_1. Точки I и I_a — центры вписанной и вневписанной окружности, касающейся BC, соответственно. Докажите, что $DI \perp A_1I_a$.

7. На стороне BC треугольника ABC отмечены такие точки P и Q, что $\angle PAB = \angle ACB$ и $\angle QAC = \angle ABC$. Точки M и N таковы, что точки P и Q являются серединами отрезков AM и AN соответственно. Отрезки BM и CN пересекаются в точке X. Докажите, что X лежит на (ABC).

8. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, точка F на отрезке BC такова, что $BL = CF$. Серединный перпендикуляр к стороне BC пересекает описанную окружность треугольника BIC в точках D и E. Докажите, что точки A, D, F, E лежат на одной окружности.

9. (*Устный тур Тургора 2025*) Дан треугольник ABC. Пусть CL — его биссектриса, W — середина дуги BCA, а P — проекция ортоцентра на медиану, проведённую из вершины C. Окружность (CPW) пересекает прямую, проходящую через C и параллельную AB, в точке Q. Докажите, что $LC = LQ$.

Касание

1. В треугольнике ABC провели биссектрису AL. Серединный перпендикуляр к отрезку AL пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках D и E. Докажите, что описанная окружность треугольника DEL касается стороны BC.

2. Точка I — центр вписанной окружности ω треугольника ABC. Окружности, проходящие через точки B и C и касающиеся прямой AI в точке I, повторно пересекают стороны AB и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что PQ касается ω.

3. Окружность, вписанная в угол с вершиной O, касается его сторон в точках A и B, K — произвольная точка на меньшей из двух дуг AB этой окружности. На прямой OB взята точка L такая, что прямые OA и KL параллельны. Пусть M — точка пересечения окружности ω, описанной около треугольника KLB, с прямой AK, отличная от K. Докажите, что прямая OM касается окружности ω.

4. Пусть A_0 — середина стороны BC треугольника ABC, а A' — точка касания с этой стороной вписанной окружности. Построим окружность ω_a с центром в A_0 и проходящую через A'. На других сторонах построим аналогичные окружности. Докажите, что если ω_a касается описанной окружности треугольника ABC на дуге BC, не содержащей A, то ещё одна из построенных окружностей касается описанной окружности.

5. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c, ℓ_d — биссектрисы соответствующих внешних углов этого четырёхугольника. Прямые ℓ_a и ℓ_b пересекаются в точке K, прямые ℓ_b и ℓ_c — в точке L, прямые ℓ_c и ℓ_d — в точке M, прямые ℓ_d и ℓ_a — в точке N. Докажите, что если окружности, описанные около треугольников ABK и CDM, касаются внешним образом, то и окружности, описанные около треугольников BCL и DAN, касаются внешним образом.

6. Пусть AD — биссектриса треугольника ABC, и прямая ℓ касается окружностей, описанных около треугольников ADB и ADC в точках M и N соответственно. Докажите, что окружность, проходящая через середины отрезков BD, DC и MN, касается прямой ℓ.

7. Остроугольный треугольник ABC $(AB < AC)$ вписан в окружность Ω. Пусть M — точка пересечения его медиан, а AH — высота этого треугольника. Луч MH пересекает Ω в точке A'. Докажите, что окружность, описанная около треугольника $A'HB$, касается AB.

Заключительный разнобой

1. В треугольнике ABC на стороне AC нашлись такие точки D и E, что $AB = AD$ и $BE = EC$ (E между A и D). Точка F — середина дуги BC окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что точки B, E, D, F лежат на одной окружности.

2. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC выбраны точки P, Q, R соответственно таким образом, что $AP = CQ$ и четырехугольник $RPBQ$ вписанный. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках A и C пересекают прямые RP и RQ в точках X и Y соответственно. Докажите, что $RX = RY$.

3. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ не является вписанным. Внутри него отмечена такая точка X, что $\angle BAC = \angle CDX$, $\angle DAC = \angle CBX$. Докажите, что $\angle BCA = \angle XCD$.

4. Окружность ω касается сторон угла BAC в точках B и C. Прямая ℓ пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно. Окружность ω пересекает ℓ в точках P и Q. Точки S и T выбраны на отрезке BC так, что $KS \parallel AC$ и $LT \parallel AB$. Докажите, что точки P, Q, S и T лежат на одной окружности.

5. На стороне AB остроугольного треугольника ABC отмечена точка D, а на продолжении стороны BC за точку C — точка E. Оказалось, что прямая, проходящая через E и параллельная AB, касается окружности, описанной около треугольника ADC. Докажите, что одна из касательных, проведённых из точки E к описанной окружности треугольника BCD, отсекает от угла ABE треугольник, подобный треугольнику ABC.

3 Комбинаторика

Оценка + пример

1. По кругу написано 100 ненулевых чисел. Между каждыми двумя соседними числами написали их произведение, а прежние числа стерли. Количество положительных чисел не изменилось. Какое минимальное количество положительных чисел могло быть написано изначально?

2. Среди $2n+1$ человека есть $n+1$ рыцарь и n лжецов. За одно действие мы можем выбрать двух различных человек X и Y, и спросить у X, верно ли, что Y — рыцарь. За какое наименьшее количество действий можно гарантированно определить «роль» хотя бы одного человека?

3. На окружности отмечено 1000 точек, каждая окрашена в один из k цветов. Оказалось, что среди любых пяти попарно пересекающихся отрезков, концами которых являются 10 различных отмеченных точек, найдутся хотя бы три отрезка, у каждого из которых концы имеют разные цвета. При каком наименьшем k это возможно?

4. На железнодорожной трассе Москва-Владивосток 200 станций. Требуется запустить несколько маршрутов так, чтобы для любых двух станций нашёлся маршрут, который останавливается в них, но не останавливается между ними. Каким наименьшим количеством маршрутов можно обойтись?

5. Пусть $2S$ — суммарный вес некоторого набора гирек. Назовем натуральное число k *средним*, если в наборе можно выбрать k гирек, суммарный вес которых равен S. Какое наибольшее количество средних чисел может иметь набор из 100 гирек?

6. В межгалактической гостинице есть 100 комнат вместимостью $101, 102, \ldots, 200$ человек. В этих комнатах суммарно живёт n человек. В гостиницу приехал VIP-гость, для которого нужно освободить комнату. Для этого директор гостиницы выбирает одну комнату и переселяет всех её жителей в одну и ту же другую комнату. При каком наибольшем n директор гостиницы всегда может таким образом освободить комнату независимо от текущего расселения?

7. В некоторых клетках квадрата 200×200 стоит по одной фишке – красной или синей; остальные клетки пусты. Одна фишка видит другую, если они находятся в одной строке или одном столбце. Известно, что каждая фишка видит ровно пять фишек другого цвета (и, возможно, некоторое количество фишек своего цвета). Найдите наибольшее возможное количество фишек.

8. В пустой отель приехали 100 туристов. Они знают, что в отеле есть одноместные номера $1, 2, \ldots, n$, из которых k на ремонте (неизвестно какие). Туристы могут заранее договориться о своих действиях, после чего по очереди уходят заселяться: каждый проверяет номера в любом порядке, находит первый свободный номер не на ремонте и остаётся там. Для каждого k укажите наименьшее n, при котором туристы гарантированно смогут заселиться, без попыток

заселиться в уже занятые номера

Клеточная комбинаторика

1. Расстоянием между двумя клетками бесконечной шахматной доски назовем минимальное число ходов в пути короля между этими клетками.На доске отмечены три клетки,попарные расстояния между которыми равны 100. Сколько существует клеток, расстояния от которых до всех трех отмеченных равны 50?

2. В квадрате 2021×2021 закрасили главную диагональ, а также все клетки под ней. Сколько существует способов разрезать по линиям сетки закрашенную часть квадрата на 2021 различный прямоугольник?

3. Из клетчатого квадрата 55×55 вырезали по границам клеток 400 трёхклеточных уголков (повёрнутых как угодно) и ещё **(а)** 550 клеток; **(б)** 500 клеток. Докажите, что какие-то две вырезанные фигуры имеют общий отрезок границы.

4. Дано натуральное число k. На клетчатой плоскости изначально отмечено N клеток. Назовём крестом клетки A множество всех клеток, находящихся в одной вертикали или горизонтали с A. Если в кресте, неотмеченной клетки A отмечено хотя бы k других клеток, то клетку A также можно отметить. Оказалось, что цепочкой таких действий можно отметить любую клетку плоскости. При каком наименьшем N это могло случиться?

5. Из клетчатого бумажного квадрата 100×100 вырезали по границам клеток 1950 двуклеточных прямоугольников. Докажите, что из оставшейся части можно вырезать по границам клеток T-тетраминошку возможно, повёрнутую. (Если такая фигурка уже есть среди оставшихся частей, считается, что её получилось вырезать.)

6. Восемь клеток одной диагонали шахматной доски назовем забором. Ладья ходит по доске, не наступая на одну и ту же клетку дважды и не наступая на клетки забора (промежуточные клетки не считаются посещенными). Какое наибольшее число прыжков через забор может совершить ладья?

7. В некоторых клетках доски 100×100 стоит по фишке. Назовём клетку красивой, если в соседних с ней по стороне клетках стоит чётное число фишек. Может ли ровно одна клетка доски быть красивой?

Процессы

1. По кругу стоят буквы A и B, всего 41 буква. Можно заменять ABA на B и наоборот, а также BAB на A и наоборот. Верно ли, что из любого начального расположения можно получить такими операциями круг, на котором стоит ровно одна буква?

2. Круг разбит на 2025 секторов, пронумерованных числами $1, 2, \ldots, 2025$ по часовой стрелке. В каждом секторе изначально сидит один таракан. За ход разрешается делать одну из двух операций:

- переместить всех тараканов из сектора с номером 1 в сектор с номером 2;
- переместить вообще всех тараканов в круге в следующий по часовой стрелке сектор.

(а) Все тараканы собрались в одном секторе. Какое наименьшее число операций второго вида могло быть сделано?
(б) За какое минимальное число действий можно всех тараканов собрать в одном секторе?

3. На бесконечном листе клетчатой бумаги N клеток окрашено черный цвет. Докажите, что из этого листа можно вырезать конечное число клетчатых квадратов так, что будут выполняться два условия:

- все черные клетки лежат в вырезанных квадратах;
- в любом вырезанном квадрате K площадь черных клеток составит не менее $1/5$ и не более $4/5$ площади K.

4. Игорь написал на доске числа $1, 2, 3, \ldots, 100$, именно в таком порядке. Раз в минуту Паша отсчитывает $2k$ чисел с начала ряда при некотором целом k и следующие за ними четыре числа a, b, c, d меняет на два числа $ac+bd$ и $ad+bc$ в любом порядке. Через 49 минут на доске остались 2 числа. Докажите, что они не зависят от порядка действий.

5. Дан отрезок $[0; 1]$. За ход разрешается разбить любой из имеющихся отрезков точкой на два новых отрезка и записать на доску произведение длин этих двух новых отрезков. Докажите, что ни в какой момент сумма чисел на доске не превысит $1/2$.

6. Изначально на доске написано натуральное число. Если на доске уже есть число a, то разрешается дописать на нее число $2a+1$ или $\frac{a}{a+2}$. После нескольких таких операций оказалось, что на доске есть число 2024. Докажите, что оно там находилось изначально.

7. Последовательность задана рекуррентной формулой $x_{n+1} = [x_n]\{x_n\}$. Докажите, что последовательность периодична (возможно,с предпериодом), если x_1

(а) положительное, **(б)** произвольное.

8. По кругу расставлено несколько коробочек. В каждой из них может лежать один или несколько шариков (или она может быть пустой). Ход состоит в том, что из какой-то коробочки берутся все шарики и раскладываются по одному, двигаясь по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки. На каждом ходу разрешается брать шарики из любой коробочки. Верно ли, что за несколько ходов из любого начального расположения шариков по коробочкам можно получить любое другое?

Графы

1. В классе учатся 25 человек, некоторые из которых дружат, дружба взаимна. Если выбрать группу из любых 5 учеников, то каждый из этой группы будет дружить с хотя бы одним из этой группы. Докажите, что в этом классе есть человек, который знает хотя бы 22 других.

2. В группе школьников любые двое имеют ровно одного общего знакомого из этой группы. Может ли эта группа состоять из 2025 школьников?

3. На симпозиум приехали 100 человек. Из них 15 французов, каждый из которых знаком хотя бы с 70 участниками симпозиума, и 85 немцев, каждый из которых знаком не более, чем с 10 участниками. Их расселили в 21 комнату. Докажите, что в какой-то из комнат ни одной пары знакомых.

4. В полном графе хотя бы 3 вершины, причём каждое ребро покрашено в один из двух цветов. Докажите, что в этом графе существует циклический маршрут, проходящий по всем вершинам ровно по 1 разу, такой, что смена цвета по пути маршрута происходит не более одного раза.

5. В классе учатся 30 человек. Учитель знает, что среди любых 7 из них есть по крайней мере 2 друга. Докажите, что учитель может их выставить не более чем в 6 шеренг так, чтобы каждые два человека из одной шеренги, стоящие рядом, были друзьями (в шеренге может стоять всего один человек).

6. В графе $2 \cdot 10^6$ вершин, при этом известно, что среди любых 2000 вершин в этом графе найдётся треугольник. Докажите, что в этом графе найдётся клика из 4 вершин.

7. В стране $3k + 1$ город, любые два из которых соединены дорогой. Все дороги делятся на 3 вида, причём из каждого города выходит по k дорог каждого вида. Назовём четвёрку городов хорошей, если в этой четвёрке есть ровно один город, все три дороги из которого в остальные города четвёрки имеют разные типы. Докажите, что количество хороших четвёрок чётно.

Алгоритмы

1. На 22 карточках записали натуральные числа от 1 до 22. Затем эти карточки перевернули и расположили по кругу. Грише разрешается узнать сумму на любых двух соседних карточках или сумму на любых двух диаметрально противоположных карточках. Может ли Гриша гарантированно узнать число на каждой из карточек?

2. На столе стоят 100 коробок, помеченных номерами $00, 01, 02, \ldots, 98, 99$. Кроме этого, на столе лежит стопка из 1000 карточек $000, 001, 002, \ldots, 998, 999$. Класть карточку в коробку разрешается, если номер коробки можно получить, стерев одну цифру из номера карточки. Например, разрешается положить карточку 037 в коробку 07, но нельзя положить карточку 156 в коробку 65. Можно ли разложить все карточки по коробкам так, чтобы ровно половина всех коробок оказалась пустыми?

3. Паша написал на 10 карточках различные натуральные числа и перевернул все карточки. За ход Гриша может указать на три карточки, Паша в ответ назовёт ему число, которое записано на какой-то из этих карточек. Может ли Гриша за несколько ходов гарантированно определить число на какой-то из карточек?

4. Если в детектор фальшивых монет опустить 5 монет весом a, b, c, d, e граммов, где $a < b < c < d < e$, то он, пожужжав, сбросит монеты весом b и c граммов в правую чашу, а остальные монеты — в левую. Есть 2025 монет попарно различных по весу. Они пронумерованы и легко различаются по внешнему виду. Можно ли при помощи детектора гарантированно определить самую легкую монету?

5. Заяц загадал 10 натуральных чисел. Волк за один ход называет 10 коэффициентов (тоже натуральные числа), а Заяц в ответ называет результат линейной комбинации своих чисел с коэффициентами Волка, при этом Заяц сам выбирает какое число умножать на какой коэффициент. За какое наименьшее число ходов Волк гарантированно может узнать все числа Зайца?

6. Имеется набор из 16 карточек. С тёмной стороны все карточки одинаковые, а на светлых сторонах карточки пронумерованы числами от 1 до 16. Маша выложила все карточки на стол тёмными сторонами вверх в виде квадрата 4×4 так, что любые две карточки с соседними числами имеют общую сторону. Можно ли так выбрать 7 карточек, что, одновременно перевернув их, можно было бы однозначно восстановить местоположение всех чисел?

7. Волк изготовил 90 фальшивых монет весом 9 грамм каждая. Случайно он к ним добавил 10 настоящих монет весом по 10 грамм каждая. Все монеты перемешаны и неотличимы друг от друга. У него есть весы, на которых можно взвесить любое количество монет, но они показывают либо точный вес, либо вес, на 1 грамм больший истинного. Может ли Волк с помощью этих весов с гарантией найти хотя бы одну фальшивую монету?

8. В тайном клубе состоят n человек, которые образовали n тайных обществ по три человека в каждом. Докажите, что можно арестовать $[n/3]$ человек так, чтобы в любом тайном обществе остался бы неарестованный.

Комбинаторный разнобой

1. На чемпионате мира по скоростному решению задач участвовало 14 человек, причём каждую из предложенных задач решило ровно 6 участников. Оказалось, что для любых двух задач найдутся не меньше 4 и не больше 5 участников, которые решили обе эти задачи. Могла ли эта олимпиада состоять из 45 задач?

2. Рассмотрим последовательность чисел $1, 2, 12, 212, 12212, \ldots$ Каждое число, начиная с третьего, в этой последовательности определяется, как «склеивание» двух предыдущих. Может ли в этой последовательности в какой-то момент появиться «периодическое» число? Число называется периодическим, если оно состоит из нескольких (больше одного) одинаковых чисел, записанных подряд.

3. На плоскости отметили конечное число точек. Любые три точки можно накрыть треугольником площади 1. Обязательно ли все точки можно накрыть треугольником площади 4.

4. У Гриши есть n камней, причём каждый камень весит хотя бы 1. Сумма весов всех камней равна s, причём $s \leqslant 2n$. Докажите, что для любого действительного r такого, что $0 \leqslant r \leqslant s$, найдется несколько камней, у которых сумма весов хотя бы r, но не больше, чем $r + 2$.

5. Внутри выпуклого 100-угольника выбрана точка X, не лежащая ни на одной его стороне или диагонали. Исходно вершины многоугольника не отмечены. Петя и Вася по очереди отмечают ещё не отмеченные вершины 100-угольника, причём Петя начинает и первым ходом отмечает сразу две вершины, а далее каждый своим очередным ходом отмечает по одной вершине. Проигрывает тот, после чьего хода точка X будет лежать внутри многоугольника с отмеченными вершинами. Докажите, что Петя может выиграть, как бы ни ходил Вася.

Часть III

Олимпиады

Тренировочная олимпиада 1

1. Существует ли 2^{100} последовательных натуральных чисел, каждое из которых является произведением ровно 100 простых чисел (возможно, совпадающих)? Например, число $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ является произведением трёх простых чисел.

2. Среди 300 участников олимпиады некоторые знакомы друг с другом. Известно, что нет трёх попарно знакомых. Кроме того, для некоторого k выполнены условия: нет участника, у которого более k знакомых, но для каждого m от 1 до k есть участник, у которого ровно m знакомых. Найдите наибольшее возможное значение k.

3. Биссектриса угла A треугольника ABC $(AB > AC)$ пересекает его описанную окружность в точке A_1. Точка X на стороне BC такова, что $\angle A_1XC = 90^\circ - \frac{\angle C}{2}$, точка Y на стороне AB такова, что $XY \parallel AA_1$. Докажите, что $BX + BY = AC$.

4. Про действительные числа a, b, c известно, что $a + b + c = -1$ и $abc \leqslant -3$. Найдите наименьшее значение выражения

$$\frac{ab+1}{a+b} + \frac{bc+1}{b+c} + \frac{ac+1}{a+c}.$$

Тренировочная олимпиада 2

1. У каждого из 30 различных натуральных чисел предпоследняя цифра больше 5. Все эти числа поделили с остатком на 99 и полученные неполные частные и остатки выписали на доску. Докажите, что среди 60 выписанных чисел не менее 9 различных.

2. Иррациональный взрыв с эпицентром в точке P удаляет из плоскости все точки, находящиеся на иррациональном расстоянии от точки P. Какое наименьшее количество иррациональных взрывов достаточно для того, чтобы удалить из плоскости все точки?

3. В клетках таблицы 10×10 расставлены натуральные числа от 1 до 100, причём каждое число встречается ровно один раз. Для каждой строки посчитали модуль разности между наибольшим и наименьшим числами в этой строке. Аналогичные величины посчитали для каждого столбца. Пусть k — наибольшее значение из всех этих 20 разностей. Найдите наименьшее возможное значение k.

4. Дан описанный четырёхугольник. Докажите, что серединные перпендикуляры к его сторонам либо пересекаются в одной точке, либо касаются одной окружности.