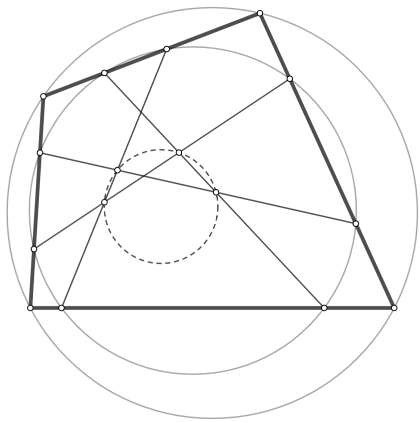
Направления

Напомним, что направленным углом $\angle(\ell_1, \ell_2)$ между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 называют угол, на который надо повернуть прямую ℓ_1 против часовой стрелки, чтобы получить прямую, параллельную ℓ_2. Значение направленного угла определено с точностью до $180°$.

Зафиксируем прямую ℓ_0. *Направлением* прямой ℓ будем называть величину $\overline{\ell} = \angle(\ell_0, \ell)$. Из свойств направленных углов следуют такие свойства направлений.

- $\overline{\ell}_1 = \overline{\ell}_2 \ \Leftrightarrow\ \ell_1 \parallel \ell_2$.
- $\angle(\ell_1, \ell_2) = \overline{\ell}_2 - \overline{\ell}_1$.
- Если две из величин $\overline{AB} + \overline{CD}$, $\overline{AC} + \overline{BD}$, $\overline{AD} + \overline{BC}$ равны, то точки A, B, C, D лежат на одной окружности или прямой.
- Если точки A, B, C, D лежат на одной окружности или прямой, то $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AC} + \overline{BD} = \overline{AD} + \overline{BC}$.
- $\overline{AB} + \overline{AC} = 2\overline{\ell} \ \Leftrightarrow\ \ell$ параллельно биссектрисе угла между прямыми AB и AC (внутренней или внешней — они неотличимы).

1. Докажите, что 4 точки лежат на пунктирной окружности.



2. На стороне BC треугольника ABC отмечены точки X и Y так, что $\angle BAX = \angle YAC$.
(a) Докажите,что центры окружностей (ABX), (ABY), (ACX), (ACY) лежат на одной прямой или окружности.

(б) Докажите, что проекции точек B и C на прямые AX и AY лежат на одной окружности.

3. Вписанная окружность треугольника ABC с центром в точке I касается сторон AB и AC в точках M и N соответственно. Через I проведена прямая, параллельная стороне BC, на неё опущены перпендикуляры BP и CQ. Докажите, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.

4. Внутри вписанного четырёхугольника $ABCD$ нашлась такая точка X, что выполнено равенство $\angle XAB = \angle XBC = \angle XCD = \angle XDA$. Продолжения пар противоположных сторон AB и CD, BC и DA пересекаются в точках P и Q соответственно. Докажите, что $\angle PXQ$ равен углу между диагоналями AC и BD.

5. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность ω. Пусть A_1 — середина отрезка, соединяющего точки касания ω со сторонами AB и AD. Аналогично определяются точки B_1, C_1, D_1. Докажите, что четырёхугольник, образованный прямыми AC_1, BD_1, CA_1, DB_1, вписанный.

6. **Окружность Ламуна.** Медианы разрезают треугольник на 6 маленьких треугольничков. Докажите, что центры описанных окружностей этих треугольников лежат на одной окружности.

7. **(а)** Выразите направление прямой Симсона точки P относительно треугольника ABC через направления $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AP}$.

(б) В окружность вписаны треугольники ABC и $A'B'C'$. Докажите, что угол между прямыми Симсона точки P относительно треугольников ABC и $A'B'C'$ равен половине суммы ориентированных дуг AA', BB', CC'.

(в) Докажите, что если сумма ориентированных дуг AA', BB', CC' равна 0, то прямые Симсона точек A', B', C' относительно треугольника ABC пересекаются в одной точке.

(г) Докажите, что если сумма ориентированных дуг AA', BB', CC' не равна 0, то прямые Симсона точек A', B', C' относительно треугольника ABC не пересекаются в одной точке.