Равномощность

Пусть X, Y — произвольные множества.

- Отображение $f\colon X \to Y$ называется *сюръекцией,* если для любого $y \in Y$ найдётся такой $x \in X$, что $f(x) = y$.
- Отображение $f\colon X \to Y$ называется *инъекцией,* если для любых различных $x_1, x_2 \in X$ следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Функция $f\colon X \to Y$ называется *биекцией,* если f одновременно и инъекция, и сюръекция.

Определение. Множества X и Y называются *равномощными,* если между ними существует биекция.

Пример. Множества натуральных и чётных натуральных чисел равномощны. Множества $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ равномощны.

1. Докажите, что отрезок $[0,1]$ равномощен отрезку $[0,2]$.

2. Докажите, что множество внутренних точек квадрата равномощно множеству внутренних точек круга.

Определение. Множество называется *счётным,* если оно равномощно $\mathbb{N}$ и *континуальным,* если оно равномощно интервалу $(0,1)$.

3. **(а)** Докажите, что объединение конечного множества счётных множеств счётно.
(б) Докажите, что объединение счётного множества счётных множеств счётно.
(в) Докажите, что $\mathbb{Q}$ счётно.

4. **(а)** Докажите, что $\mathbb{R}$ континуально.
(б) Докажите, что полуинтервал $[0,1)$ континуален.

5. **(а)** Докажите, что множество всех конечных последовательностей цифр 0 и 1 счётно.
(б) Докажите, что множество всех бесконечных последовательностей цифр 0 и 1 континуально.
(в) Докажите, что континуальное множество не счётно.

6. Действительное число называется *трансцендентным*, если оно не является корнем многочлена с целыми коэффициентами. Существуют ли трансцендентные числа?

7. Докажите, что на прямой нельзя расположить более чем счетное множество попарно непересекающихся интервалов.

8. Из плоскости выкинули счётное множество точек. Докажите, что любые две оставшиеся точки плоскости можно соединить ломаной.

9. Докажите, что внутренность квадрата континуальна.

10. **Теорема Кантора — Бернштейна.** Известно, что каждое из множеств A и B равномощно некоторому подмножеству второго. Докажите, что A и B равномощны.