

Комбинаторный разбой

1. На симпозиум приехали 100 человек. Из них 15 французов, каждый из которых знаком хотя бы с 70 участниками симпозиума, и 85 немцев, каждый из которых знаком не более, чем с 10 участниками. Их расселили в 21 комнату. Докажите, что в какой-то из комнат ни одной пары знакомых.
2. На железнодорожной трассе Москва–Владивосток 200 станций. Требуется запустить несколько маршрутов так, чтобы для любых двух станций нашёлся маршрут, который останавливается в них, но не останавливается между ними. Каким наименьшим количеством маршрутов можно обойтись?
3. В классе учатся 30 человек. Учитель знает, что среди любых 7 из них есть по крайней мере 2 друга. Докажите, что учитель может их выставить не более чем в 6 шеренг так, чтобы каждые два человека из одной шеренги, стоящие рядом, были друзьями (в шеренге может стоять всего один человек).
4. В квадрате 2021×2021 закрасили главную диагональ, а также все клетки под ней. Сколько существует способов разрезать по линиям сетки закрашенную часть квадрата на 2021 различных прямоугольников?
5. Заяц загадал 10 натуральных чисел. Волк за один ход называет 10 коэффициентов (тоже натуральные числа), а Заяц в ответ называет результат линейной комбинации своих чисел с коэффициентами Волка, при этом Заяц сам выбирает какое число умножать на какой коэффициент. За какое наименьшее число ходов Волк гарантированно может узнать все числа Зайца?
6. Имеется набор из 16 карточек. С тёмной стороны все карточки одинаковые, а на светлых сторонах карточки пронумерованы числами от 1 до 16. Маша выложила все карточки на стол тёмными сторонами вверх в виде квадрата 4×4 так, что любые две карточки с соседними числами имеют общую сторону. Можно ли так выбрать 7 карточек, что, одновременно перевернув их, можно было бы однозначно восстановить местоположение всех чисел?
7. В пустой отель приехали 100 туристов. Они знают, что в отеле есть одноместные номера $1, 2, \dots, n$, из которых k на ремонте (неизвестно какие). Туристы могут заранее договориться о своих действиях, после чего по очереди уходят заселяться: каждый проверяет номера в любом порядке, находит первый свободный номер не на ремонте и остаётся там. Для каждого k укажите наименьшее n , при котором туристы гарантированно смогут заселиться, без попыток заселиться в уже занятые номера.
8. В некоторых клетках доски 100×100 стоит фишка. Назовём клетку красивой, если в соседних с ней по стороне клетках стоит чётное число фишек. Может ли ровно одна клетка доски быть красивой?