Постсборный металгебразнобой

1. Приведённые квадратные трёхчлены $P(x)$ и $Q(x)$ таковы, что уравнения
$$P(Q(x)) = 0 \quad \text{и} \quad Q(P(x)) = 0$$
не имеют вещественных корней. Докажите, что хотя бы одно из уравнений $P(P(x)) = 0$ и $Q(Q(x)) = 0$ тоже не имеет вещественных корней.

2. Назовём *главными делителями* составного числа n два наибольших его натуральных делителя, отличных от n. Составные натуральные числа a и b таковы, что главные делители числа a совпадают с главными делителями числа b. Докажите, что $a = b$.

3. Самый лучший преподаватель Сергей изучает делители чисел. Для каждого натурального числа n он находит наибольший его делитель d, меньший $\sqrt{n}$. После этого он выписывает на доску число $\frac{n}{d} - d$. Докажите, что любое число k рано или поздно окажется на доске.

4. Верно ли, что для любых трёх различных натуральных чисел a, b, c найдётся квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами и положительным старшим коэффициентом, принимающий в некоторых целых точках значения a^3, b^3, c^3?

5. Вещественные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ лежат в отрезке $[-1, 1]$ и в сумме дают 0. Докажите, что эти числа можно выписать в некотором порядке $y_1, y_2, \ldots, y_n$ так, что для любых $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ будет верно $|y_i + y_{i+1} + \ldots + y_j| \leqslant 2$.

6. Квадратный трёхчлен $P(x)$ разрешается заменить на один из трёхчленов
$$x^2 P\left(\frac{1}{x} + 1\right) \quad \text{или} \quad (x-1)^2 P\left(\frac{1}{x-1}\right).$$
Можно ли с помощью таких операций из квадратного трёхчлена $x^2 + 4x + 3$ получить трёхчлен $x^2 + 10x + 9$?

7. В республике математиков выбрали число $\alpha > 2$ и выпустили монеты достоинствами в 1 рубль, а также в α^k рублей при каждом натуральном k. При этом α было выбрано так, что достоинства всех монет, кроме самой мелкой, иррациональны. Могло ли оказаться, что любую сумму в натуральное число рублей можно набрать этими монетами, используя монеты каждого достоинства не более 6 раз?

8. Пусть n — некоторое d-значное натуральное число, не делящееся на 10. Выписав цифры числа n в обратном порядке, получили число m. Может ли десятичная запись произведения nm состоять только из цифр «8», если
(а) $d = 9998$; **(б)** $d = 9999$?

9. Даны натуральные числа a и b. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что число $a^n + 1$ **не** делится на $n^b + 1$.