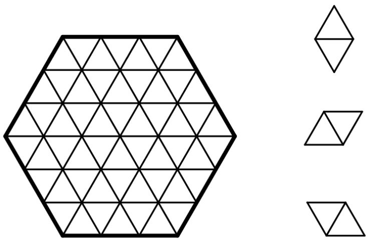
Тренировочная олимпиада. Регион

1. На плоскости провели 128 прямых и отметили все их точки пересечения. Какое наибольшее количество из отмеченных точек может лежать на одной окружности?

2. Дан квадратный трёхчлен $f(x)$ с действительными коэффициентами. Докажите, что найдётся натуральное n такое, что у уравнения $f(x) = \frac{1}{n}$ нет рациональных корней.

3. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, а прямые AD и BC — в точке F. Точки X и Y — середины сторон AD и BC соответственно. Точка O — центр описанной окружности $ABCD$, а точка O_1 — центр описанной окружности треугольника EXY. Докажите, что $OF \parallel O_1E$.

4. Правильный шестиугольник со стороной n разбит прямыми, параллельными его сторонам, на правильные треугольники со стороной 1. Этот шестиугольник замостили плитками в виде ромбиков, каждая из которых покрывает два треугольничка. Докажите, что плиток, расположенных каждым из трёх способов, в этом замощении встретится поровну.



5. Назовём натуральное число *хорошим*, если сумма всех его делителей, включая 1, но не включая само число, на 1 меньше этого числа. Найдите все хорошие числа, некоторая степень которых тоже хорошая.