

## Точка Болтая

Точкой Болтая треугольника  $ABC$  со стороны вершины  $A$  назовём такую точку  $B$ , что

$$\angle BAB = \angle ACB \quad \text{и} \quad \angle CAB = \angle ABB.$$

Несложно видеть, что  $B$  лежит на  $(BOC)$ .

- (а) Докажите, что точки  $A$ ,  $B$  и середины сторон  $AB$  и  $AC$  лежат на одной окружности.

(б) Докажите, что  $B$  — это проекция  $O$  на симедиану.

(в) Докажите, что  $B$  и точка Шалтая изогонально сопряжены.
- В треугольнике  $ABC$  провели высоту  $AH$  и отметили точку  $M$  — середину стороны  $AB$ . Докажите, что описанная окружность треугольника  $BMH$  проходит через точку Болтая со стороны вершины  $A$ .
- Касательная к описанной окружности треугольника  $ABC$ , проведённая в точке  $A$ , пересекает прямую  $BC$  в точке  $D$ . Точка  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABC$ . Докажите, что прямая  $OD$  проходит через точку Болтая со стороны вершины  $A$ .
- В треугольнике  $ABC$  провели высоту  $AD$  и отметили середины  $M$  и  $N$  отрезков  $AB$  и  $AC$ . Докажите, что прямая, проходящая через  $D$  и точку Болтая со стороны вершины  $A$ , делит отрезок  $MN$  пополам.
- На сторонах  $AB$  и  $AC$  остроугольного треугольника  $ABC$  вовне построены квадраты  $ABDE$  и  $ACFG$ . Прямая  $AG$  пересекает отрезок  $BD$  в точке  $X$ , прямая  $AE$  пересекает отрезок  $CF$  в точке  $Y$ . Докажите, что окружности  $(DGX)$  и  $(FEY)$  пересекаются в точке Болтая.

## Шалтай или Болтай

- Внешняя биссектриса угла  $A$  треугольника  $ABC$  пересекает прямую  $BC$  в точке  $D$ , а окружность  $(ABC)$  — в точке  $A_1$ . Точки  $I$  и  $I_a$  — центры вписанной и внеписанной окружности, касающейся  $BC$ , соответственно. Докажите, что  $DI \perp A_1I_a$ .
- На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены такие точки  $P$  и  $Q$ , что  $\angle PAB = \angle ACB$  и  $\angle QAC = \angle ABC$ . Точки  $M$  и  $N$  таковы, что точки  $P$  и  $Q$  являются серединами отрезков  $AM$  и  $AN$  соответственно. Отрезки  $BM$  и  $CN$  пересекаются в точке  $X$ . Докажите, что  $X$  лежит на  $(ABC)$ .
- (Устный тур Тургора 2025) Дан треугольник  $ABC$ . Пусть  $CL$  — его биссектриса,  $W$  — середина дуги  $BCA$ , а  $P$  — проекция ортоцентра на медиану, проведённую из вершины  $C$ . Окружность  $(CPW)$  пересекает прямую, проходящую через  $C$  и параллельную  $AB$ , в точке  $Q$ . Докажите, что  $LC = LQ$ .