Комбинаторный разнобой

1. По кругу стоят буквы А и В, всего 41 буква. Можно заменять АВА на В и наоборот, а также ВАВ на А и наоборот. Верно ли, что из любого начального расположения можно получить такими операциями круг, на котором стоит ровно одна буква?

2. Среди $2n+1$ человека есть $n+1$ рыцарь и n лжецов. За одно действие мы можем выбрать двух различных человек X и Y, и спросить у X, верно ли, что Y — рыцарь. За какое наименьшее количество действий можно гарантированно определить «роль» хотя бы одного человека?

3. На бесконечном листе клетчатой бумаги N клеток окрашено черный цвет. Докажите, что из этого листа можно вырезать конечное число клетчатых квадратов так, что будут выполняться два условия:

- все черные клетки лежат в вырезанных квадратах;
- в любом вырезанном квадрате K площадь черных клеток составит не менее $1/5$ и не более $4/5$ площади K.

4. Пусть $2S$ — суммарный вес некоторого набора гирек. Назовем натуральное число k *средним*, если в наборе можно выбрать k гирек, суммарный вес которых равен S. Какое наибольшее количество средних чисел может иметь набор из 100 гирек?

5. Серёжа написал на доске числа $1, 2, 3, \ldots, 100$, именно в таком порядке. Раз в минуту Паша отсчитывает $2k$ чисел с начала ряда при некотором целом k и следующие за ними четыре числа a, b, c, d меняет на два числа $ac+bd$ и $ad+bc$ в любом порядке. Через 49 минут на доске остались 2 числа. Докажите, что они не зависят от порядка действий.

6. Из клетчатого бумажного квадрата 100×100 вырезали по границам клеток 1950 двуклеточных прямоугольников. Докажите, что из оставшейся части можно вырезать по границам клеток T-тетраминошку возможно, повёрнутую. (Если такая фигурка уже есть среди оставшихся частей, считается, что её получилось вырезать.)

7. Дано натуральное число k. На клетчатой плоскости изначально отмечено N клеток. Назовём крестом клетки A множество всех клеток, находящихся в одной вертикали или горизонтали с A. Если в кресте, неотмеченной клетки A отмечено хотя бы k других клеток, то клетку A также можно отметить. Оказалось, что цепочкой таких действий можно отметить любую клетку плоскости. При каком наименьшем N это могло случиться?

8. В межгалактической гостинице есть 100 комнат вместимостью $101, 102, \ldots, 200$ человек. В этих комнатах суммарно живёт n человек. В гостиницу приехал VIP-гость, для которого нужно освободить комнату. Для этого директор гостиницы выбирает одну комнату и переселяет всех её жителей в одну и ту же другую комнату. При каком наибольшем n директор гостиницы всегда может таким образом освободить комнату независимо от текущего расселения?