Точка Шалтая

Точкой Шалтая треугольника ABC со стороны вершины A назовём такую точку Ш, что

$$\angle BA\text{Ш} = \angle CB\text{Ш} \quad \text{и} \quad \angle CA\text{Ш} = \angle BC\text{Ш}.$$

В остроугольном треугольнике ABC

- H — точка пересечения высот AA_1, BB_1, CC_1;
- M — середина стороны BC;
- E — точка, симметричная H относительно BC;
- L — пересечение симедианы из вершины A с (ABC).

1. **(а)** Докажите, что Ш лежит на AM.
(б) Докажите, что Ш лежит на (BHC).
(в) Докажите, что Ш — проекция H на AM.
(г) Докажите, что Ш и L симметричны относительно BC.
(д) Докажите, что ШB/Ш$C = AB/AC$.
(е) Докажите, что четырёхугольники BC_1ШM и B_1CШM вписанные.
(ж) Докажите, что прямые B_1C_1 и HШ пересекаются на прямой BC.

Упражнение. Пусть Ш$'$ — точка Шалтая треугольника BHC со стороны вершины H. Нарисуйте для неё все факты задачи 1 (кроме (г)).

2. Докажите, что Ш$'$, A_1, L лежат на одной прямой.

3. Докажите, что B_1, C_1, L и E лежат на одной окружности.

4. Докажите, что A, M, E и точка пересечения BC и B_1C_1 лежат на одной окружности.

5. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки C' и B' соответственно так, что $\angle AC'C = \angle CB'B$. Докажите, что описанная окружность треугольника $AB'C'$ проходит через Ш.

6. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, точка F на отрезке BC такова, что $BL = CF$. Серединный перпендикуляр к стороне BC пересекает описанную окружность треугольника BIC в точках D и E. Докажите, что точки A, D, F, E лежат на одной окружности.