Неприводимые многочлены

Определение. Многочлен с коэффициентами в $\mathbb{K}$ называется *приводимым* над $\mathbb{K}$, если его можно представить в виде произведения двух многочленов ненулевой степени с коэффициентами в $\mathbb{K}$. В противном случае многочлен называется *неприводимым.*

Определение. Пусть $\mathbb{K}$ равно $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. *Наибольшим общим делителем* двух многочленов называется многочлен, который делит данные многочлены и кратен их любому другому общему делителю.

1. **Лемма Гаусса.**
(а) Многочлен с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ называется *примитивным*, если его коэффициенты взаимно просты в совокупности. Докажите, что произведение двух примитивных многочленов — примитивный многочлен.
(б) Докажите, что многочлен с целыми коэффициентами приводимый в $\mathbb{Q}$ приводим и в $\mathbb{Z}$.

2. Многочлен $P^*(x)$ называется *взаимным* по отношению к многочлену $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, если его коэффициенты расположены в обратном порядке: $P^*(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$. Докажите, что многочлен с рациональными коэффициентами и $a_0 \neq 0$ неприводим над $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда неприводим его взаимный.

3. **(а)** Воспользовавшись аналогом алгоритма Евклида для многочленов, докажите, что НОД многочленов существует и единственен с точностью до умножения на константу.
(б) Сформулируйте и докажите аналог теоремы Безу про НОД для многочленов.
(в) У двух многочленов, неприводимых над $\mathbb{Q}$, нашёлся общий вещественный корень. Докажите, что эти многочлены отличаются друг от друга умножением на константу.

4. **Критерий Эйзенштейна.** Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что существует такое простое число p, что $a_i \vdots p$ при $i = 0, 1, \ldots, n-1$, $a_0 \not\vdots\, p^2$, $a_n \not\vdots\, p$. Докажите, что $P(x)$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

5. Докажите, что следующие многочлены неприводимы над $\mathbb{Q}$:
(а) $2x^4 - 4x^2 + 8x + 1$,
(б) $(x+1)^p + p - 1$,
(в) $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) - 1$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные целые числа,
(г) $x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$, где p — некоторое простое число,
(д) $x^n + 5x^{n-1} + 3$.

6. Неприводимый над $\mathbb{Z}$ многочлен $P(x)$ имеет два вещественных корня, дающих в произведении 1. Докажите, что $P(x)$ имеет чётную степень.

7. Многочлен с целыми коэффициентами степени n принимает в некоторых n различных целых точках значения, отличные от нуля и по модулю меньшие, чем $\frac{m!}{2^m}$, где $m = n - [\frac{n}{2}]$. Докажите, что он неприводим над $\mathbb{Z}$.

8. Рациональное число x таково, что $\cos(\pi x)$ так же является рациональным. Докажите, что $\cos(\pi x) \in \{0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}\}$.