Радиусы окружностей

В треугольнике ABC

- a, b, c — длины соответствующих сторон;
- S — площадь, p — полупериметр;
- I и O — центры вписанной и описанной окружностей, r и R — их радиусы;
- r_a, r_b, r_c — радиусы вневписанных окружностей со стороны вершин A, B, C.

Известные формулы: $S = pr = (p-a)r_a$, $S = \frac{abc}{4R}$.

1. **(а)** Докажите, что $rr_a = (p-b)(p-c)$ и $r_b r_c = p(p-a)$. Выведите отсюда формулу Герона.
(б) Докажите, что $S = \frac{ar_b r_c}{r_b + r_c}$.

2. Пусть h_a, h_b, h_c — длины высот треугольника. Докажите, что

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}.$$

3. Докажите, что угол C треугольника ABC прямой тогда и только тогда, когда $r_c = r + r_a + r_b$.

4. Докажите, что $r_a + r_b + r_c \geqslant \sqrt{3}p$.

5. Докажите, что $4R = r_a + r_b + r_c - r$.

6. Докажите, что в прямоугольном треугольнике произведение двух из отрезков p, $p-a$, $p-b$, $p-c$ равно произведению двух других. Выведите из этого следующий факт: в прямоугольном треугольнике 12 точек касания вписанной и вневписанных окружностей можно разбить на две шестёрки точек, каждая из которых лежит на одной окружности.

7. **Формула Карно.** Сумма расстояний от центра описанной окружности остроугольного треугольника до его сторон равна $R + r$.
(а) Пусть A_1 — середина дуги BC окружности (ABC), не содержащей точку A. Докажите, что расстояние от A_1 до BC равно $\frac{r_a - r}{2}$. Выведите отсюда формулу Карно.
(б) Выведите формулу Карно с помощью теоремы Птолемея.
(в) Как будет выглядеть формула Карно для тупоугольного треугольника?

8. Вписанный многоугольник триангулирован. Докажите, что сумма радиусов вписанных окружностей треугольников разбиения не зависит от триангуляции.

9. Пусть BB_1 и CC_1 — биссектрисы треугольника ABC. Докажите, что $R = r_a$ тогда и только тогда, когда O лежит на прямой B_1C_1.