

По мотивам ММО

1. Преподаватель назвал две различные ненулевые цифры. Коля хочет составить делящееся на 7 семизначное натуральное число, в десятичной записи которого нет других цифр, кроме этих двух. Всегда ли Коля может это сделать, какие бы две цифры ни назвал преподаватель?
2. Герцог Сумматор выбрал некоторые вещественные числа (хотя бы одно, но, возможно, бесконечное количество). То же самое сделал герцог Вычитатор. Оказалось, что если x — число Сумматора, а y — число Вычитатора, то $x + y$ — число Сумматора, а $y - x$ — число Вычитатора. Обязательно ли все числа Сумматора являются числами Вычитатора?
3. Дана последовательность $a_n = n!(n^2 - 2025n + 1)$ для всех натуральных n . Найдите сумму первых 2025 членов этой последовательности.
4. В квадрате 2025×2025 отмечено несколько клеток. За один ход Кирилл может узнать количество отмеченных клеток в любом клетчатом квадрате со стороной меньше 2025 внутри исходного квадрата. Какого наименьшего количества ходов точно хватит, чтобы узнать количество отмеченных клеток во всём квадрате?
5. По кругу стоят 50 чисел (необязательно целых). Известно, что произведение любых 25 чисел отличается от произведения 25 остальных не более чем на 2. Докажите, что какие-то два соседних числа отличаются не более чем на 2.
6. Существуют ли такие натуральные числа m и n и такой многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, что $f(m)$ не делится на n , но $f(p^k)$ делится на n для любого простого числа p и любого натурального k ?
7. Для каких k на бесконечной клетчатой плоскости можно расставить шахматных коней так, чтобы каждый конь бил ровно k других?
8. Имеется 15 неразличимых на вид монет. Известно, что одна из них весит 1 г, две — по 2 г, три — по 3 г, четыре — по 4 г, пять — по 5 г. На монетах есть соответствующие надписи с указанием масс. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь проверить, все ли надписи сделаны верно? (Не требуется определять, какие именно надписи верны, а какие — нет.)