Разнобой к ММО

1. В строку выписано 81 ненулевое число. Сумма любых двух соседних чисел положительна, а сумма всех чисел отрицательна. Каким может быть знак произведения всех чисел?

2. Положительные числа a и b таковы, что $a - b = \frac{a}{b}$. Что больше, $a + b$ или ab?

3. Клетки бумажного квадрата 8×8 раскрашены в два цвета. Докажите, что Арсений может вырезать из него по линиям сетки два квадрата 2×2, не имеющих общих клеток, раскраски которых совпадают. (Раскраски, отличающиеся поворотом, считаются разными.)

4. Найдите наименьшее натуральное число n, для которого $n^2 + 20n + 19$ делится на 2019.

5. В узлах сетки клетчатого прямоугольника 4×5 расположены 30 лампочек, изначально все они погашены. За ход разрешается провести любую прямую, не задевающую лампочек (размерами лампочек следует пренебречь, считая их точками), такую, что с какой-то одной стороны от неё ни одна лампочка не горит, и зажечь все лампочки по эту сторону от прямой. Каждым ходом нужно зажигать хотя бы одну лампочку. Можно ли зажечь все лампочки ровно за четыре хода?

6. Докажите, что для любых натуральных $a_1, a_2, \ldots, a_k$ таких, что
$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k} > 1,$$
у уравнения
$$\left[\frac{n}{a_1}\right] + \left[\frac{n}{a_2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{a_k}\right] = n$$
не больше чем $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$ решений в натуральных числах. ($[x]$ — целая часть числа x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x.)

7. В остроугольном треугольнике ABC ($AB < BC$) провели высоту BH. Точка P симметрична точке H относительно прямой, соединяющей середины сторон AC и BC. Докажите, что прямая BP содержит центр описанной окружности треугольника ABC.

8. Каждый отрезок с концами в вершинах правильного 100-угольника покрасили — в красный цвет, если между его концами четное число вершин, и в синий — в противном случае (в частности, все стороны 100-угольника красные). В вершинах расставили числа, сумма квадратов которых равна 1, а на отрезках — произведения чисел в концах. Затем из суммы чисел на красных отрезках вычли сумму чисел на синих. Какое наибольшее число могло получиться?