Линейные функции

Определение. Функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется *линейной*, если выполнено одно из двух эквивалентных условий:

- существуют действительные a, b, c такие, что для любой точки $P(x, y)$ выполнено равенство $f(P) = ax + by + c$;
- для любых точек A, B и для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ для точки C, заданной равенством $\vec{C} = \alpha\vec{A} + (1-\alpha)\vec{B}$, выполнено

$$f(C) = \alpha f(A) + (1-\alpha) f(B).$$

Утверждение. Уравнение $f(x, y) = d$ для действительного d задаёт либо пустое множество, либо прямую, либо всю плоскость.

Примеры линейных функций: константа, ориентированное расстояние до фиксированной прямой, ориентированная площадь треугольника PBC с фиксированным основанием BC.

1. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1.
(а) Докажите, что для любой точки на отрезке B_1C_1 расстояние от неё до прямой BC равно сумме расстояний от неё до прямых AB и AC.
(б) Пусть AA_1 — биссектриса внешнего угла A. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

2. **(а)** Внутри треугольника нашлись три точки, не лежащие на одной прямой, такие, что сумма расстояний от точки до сторон одинакова для каждой из них. Что можно сказать про треугольник?
(б) Внутри выпуклого четырёхугольника нашлись три точки, не лежащие на одной прямой, такие, что сумма расстояний от точки до сторон одинакова для каждой из них. Что можно сказать про четырёхугольник?

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. С центром в точке B построена окружность ω_b радиуса $BB_1/2$; с центром в точке C построена окружность ω_c радиуса $CC_1/2$. Прямая ℓ — общая внешняя касательная к окружностям ω_b и ω_c, не пересекающая треугольник ABC. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника, образованного прямыми AB, AC и ℓ, лежит на отрезке BC.

4. **(а) Прямая Гаусса.** В четырёхугольнике $ABCD$ прямые AB и CD пересекаются в точке E, а прямые AD и BC — в точке F. Докажите, что середины отрезков AC, BD, EF лежат на одной прямой.
(б) Теорема Ньютона. Докажите, что в описанном четырёхугольнике центр вписанной окружности лежит на прямой Гаусса.

5. Докажите, что площадь выпуклого пятиугольника $ABCDE$ меньше суммы площадей треугольников ABC, BCD, CDE, DEA, EAB.

6. (*Эта задача уже была. Попробуйте осмыслить её в контексте функций.*) Внутри правильного n-угольника взята точка X, проекции которой на все стороны попадают во внутренние точки сторон. Этими точками стороны разделяются на $2n$ отрезков. Покрасим эти отрезки в шахматном порядке в красный и синий цвета.

(а) Докажите, что сумма длин красных отрезков равна сумме длин синих отрезков.

(б) Докажите, что сумма площадей треугольников с вершиной в точке X и основанием в красных отрезках равна сумме площадей аналогичных синих треугольников.

7. Пусть I и O — центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC соответственно.

(а) Докажите, что одно из расстояний от I до серединных перпендикуляров к сторонам треугольника равно сумме двух других.

(б) Докажите, что уравнение

$$\rho(X, AB) + \rho(X, BC) + \rho(X, CA) = \mathrm{const}$$

задаёт прямую, перпендикулярную OI (как для этого нужно выбрать ориентацию?).

(в) Докажите, что основания внешних биссектрис лежат на прямой, перпендикулярной OI.

(г) Пусть I_a — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Докажите, что прямая OI_a перпендикулярна прямой B_1C_1.

8. В неравностороннем треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, а точка O — центр описанной окружности. Прямая s проходит через I и перпендикулярна прямой IO. Прямая ℓ, симметричная прямой BC относительно s, пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно (K и L отличны от A). Докажите, что центр описанной окружности треугольника AKL лежит на прямой IO.

9. Треугольники ABC и $A'B'C'$ имеют общую описанную и вписанную окружности. Докажите, что для любой точки P, лежащей внутри обоих треугольников, сумма расстояний от P до сторон треугольника ABC равна сумме расстояний от P до сторон треугольника $A'B'C'$.