Линейные функции на плоскости

Теория

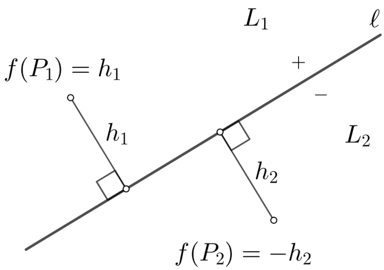
Мы будем рассматривать функции, которые каждой точке плоскости сопоставляют действительное число. Назовём такую функцию f *линейной*, если существуют система координат и действительные числа a, b, c такие, что для любой точки $P(x, y)$ выполнено равенство $f(P) = ax + by + c$. Далее мы также будем использовать для функции f обозначение $f(x, y)$.

Утверждение 1. *Множество решений уравнения $f(x, y) = 0$ для линейной функции f — это либо пустое множество, либо прямая, либо вся плоскость.*

Доказательство. Пусть $f(x, y) = ax + by + c$.

- Если хотя бы одно из чисел a и b не равно 0, то уравнение $f(x, y) = 0$ задаёт прямую.
- Если $a = b = 0$ и $c \neq 0$, то уравнение $f(x, y) = 0$ не имеет решений.
- Если $a = b = c = 0$, то уравнение $f(x, y) = 0$ задаёт плоскость. □

Пусть прямая ℓ разбивает плоскость на полуплоскости L_1 и L_2. Положим значение функции в точке P равным расстоянию от P до ℓ, взятому со знаком «+», если $P \in L_1$, и со знаком «−», если $P \in L_2$. Обозначим полученную функцию через $\rho(P, \ell)$ и назовём *ориентированным расстоянием до прямой.*



Утверждение 2. $\rho(P, \ell)$ *— линейная функция.*

Доказательство. Пусть прямая ℓ в некоторой системе координат задана уравнением $ax+by+c = 0$. Если домножить уравнение на ненулевое действительное число, оно по-прежнему будет задавать прямую ℓ, поэтому можно считать, что $a^2 + b^2 = 1$.

Несложно видеть, что любая непостоянная линейная функция g в одной полуплоскости относительно прямой $g = 0$ принимает положительные значения, а в другой — отрицательные. Введём линейную функцию $f(x, y) = ax + by + c$. Уравнение $f = 0$

задаёт прямую ℓ. Будем считать, что $\rho(P,\ell)$ и $f(P)$ принимают в полуплоскостях значения одинаковых знаков (если это не так, то заменим f на $-f$).

Расстояние (не ориентированное) от точки $P(x_p, y_p)$ до ℓ можно вычислить по формуле

$$\frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = |ax_p + by_p + c| = |f(P)|.$$

Таким образом, $|\rho(P,\ell)| = |f(P)|$. Поскольку в каждой точке знаки функций $\rho(P,\ell)$ и $f(P)$ одинаковы, то из этого следует, что $\rho(P,\ell) = f(P)$, то есть $\rho(P,\ell)$ — линейная функция. □

Следствие. *Пусть f — непостоянная линейная функция, прямая ℓ задана уравнением $f = 0$. Тогда $f(P) = \alpha \cdot \rho(P,\ell)$ для некоторой константы α.*

Доказательство. Пусть $f(x,y) = ax + by + c$. Из доказательства утверждения 2 следует, что если $a^2 + b^2 = 1$, то $f(P) = \rho(P,\ell)$. Если же $a^2 + b^2 \neq 1$, то, поделив f на $\sqrt{a^2+b^2}$, получим функцию f' нужного вида, то есть

$$f = \sqrt{a^2+b^2} \cdot f' = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \rho(P,\ell).$$ □

Отметим, что определение ориентированного расстояния до прямой не зависит от выбора системы координат, поэтому линейная функция f в любой системе координат имеет вид $f(x,y) = ax + by + c$ для некоторых a, b, c (в разных системах координат они будут разными).

Помимо ориентированного расстояния до прямой, нам будут полезны ещё две линейных функции.

- *Константа.* Функция f, принимающая одинаковое значение во всех точках плоскости.
- *Ориентированная площадь треугольника с фиксированным расстоянием..* Пусть на прямой ℓ фиксированы точки A и B. Рассмотрим линейную функцию $S(P, AB) = \frac{AB}{2} \cdot \rho(P,\ell)$. Она равна площади треугольника PAB, взятой со знаком «$+$», если P лежит в одной полуплоскости относительно ℓ, и со знаком «$-$», если в другой.

Научимся по известным значениям линейной функции в точках A и B восстанавливать значение функции в каждой точке прямой AB.

Как известно, следующие два условия равносильны:

- точка C лежит на прямой AB и $\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{CB} = (1-\alpha) : \alpha$;
- для любой точки O выполнено равенство $\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OB}$.

Поскольку равенство из второго условия верно для любой точки O, то в дальнейшем будем записывать его сокращённо: $\vec{C} = \alpha\vec{A} + (1-\alpha)\vec{B}$.

Утверждение 3. *Дана линейная функция f, точки A, B и $\alpha \in \mathbb{R}$. Определим точку C равенством $\vec{C} = \alpha\vec{A} + (1-\alpha)\vec{B}$. Тогда*

$$f(C) = \alpha f(A) + (1-\alpha)f(B).$$

Доказательство. Пусть $f(x,y) = ax + by + c$. Будем обозначать координаты точки A через (x_a, y_a), аналогично для других точек. Пусть O — начало координат. Тогда по определению точки C

$$\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OB} \;\Leftrightarrow\; (x_c, y_c) = \alpha\cdot(x_a, y_a) + (1-\alpha)\cdot(x_b, y_b) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \begin{cases} x_c = \alpha x_a + (1-\alpha)x_b, \\ y_c = \alpha y_a + (1-\alpha)y_b. \end{cases}$$

Домножив первое уравнение на a, второе — на b, сложив и добавив к обеим частям c, получим требуемое равенство $f(C) = \alpha f(A) + (1-\alpha)f(B)$. $\square$

Упражнение. Докажите обратное утверждение: если для любых точек A, B и для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ для точки C, заданной равенством $\vec{C} = \alpha\vec{A} + (1-\alpha)\vec{B}$, выполнено

$$f(C) = \alpha f(A) + (1-\alpha)f(B),$$

то f — линейная функция.

Указание. Рассмотрим систему координат с началом в точке O и единичными векторами $\overrightarrow{OX}$ и $\overrightarrow{OY}$. Обозначим значения функции в этих точках через

$$f(O) = c, \quad f(X) = a + c, \quad f(Y) = b + c.$$

Сначала докажите, что значения функции f совпадает со значениями функции $ax + by + c$ на осях, а затем и на всей плоскости.

Отметим ещё два очевидных утверждения, которые будут полезны при решении задач.

- Сумма линейных функций — линейная функция.
- Если $f(A) = f(B)$, то $f(C) = f(A) = f(B)$ для любой точки C на прямой AB.

Практика

Пример 1. *В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1 и биссектриса внешнего угла AA_1.*
(а) *Докажите, что для любой точки на отрезке B_1C_1 расстояние от неё до прямой BC равно сумме расстояний от неё до прямых AB и AC.*
(б) *Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.*

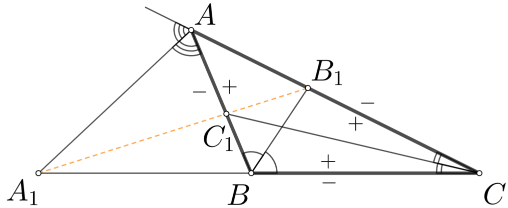
Решение. Рассмотрим функцию

$$f(P) = \rho(P, AB) + \rho(P, AC) - \rho(P, BC),$$

где каждое ориентированное расстояние считается с плюсом внутри треугольника. Функция f — линейная, как сумма линейных функций. Поскольку $\rho(B_1, AC) = 0$ и $\rho(B_1, AB) = \rho(B_1, BC)$, то $f(B_1) = 0$. Аналогично $f(C_1) = 0$. Тогда для любой точки X прямой B_1C_1 выполнено равенство $f(X) = 0$, то есть

$$f(X) = 0 \Leftrightarrow \rho(X, AB) + \rho(X, AC) = \rho(X, BC).$$

Если X лежит внутри треугольника, то все расстояния считаются с плюсом, что доказывает утверждение.



Перейдём к пункту (б). Поскольку $\rho(A_1, BC) = 0$ а $\rho(P, AB)$ и $\rho(P, AC)$ равны по модулю и имеют противоположные знаки, то $f(A_1) = 0$. Чтобы сделать вывод, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой, нужно доказать, что функция f отлична от константы. Для этого подставим в функцию f вершину треугольника и проверим, что значение в ней не равно 0:

$$f(A) = \rho(A, AB) + \rho(A, AC) - \rho(A, BC) = \rho(A, BC) \neq 0,$$

что и требовалось. $\square$

Пример 2 (теорема о трёх колпаках). *Даны три окружности, ни одна из которых не лежит целиком внутри другой. Тогда точки пересечения общих внешних касательных к каждой паре окружностей лежат на одной прямой.*

Решение. Обозначим центры окружностей через A, B, C, а их радиусы — через r_a, r_b, r_c соответственно. Если точки A, B, C лежат на одной прямой, утверждение очевидно. Далее будем считать, что они не лежат на одной прямой.

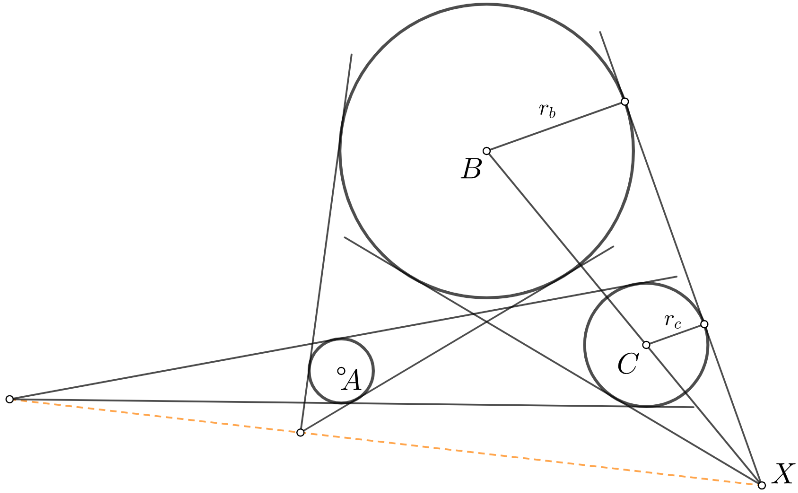
Пусть f_a — линейная функция такая, что

$$f_a(A) = 1, \quad f_a(B) = f_a(C) = 0,$$

аналогично определим функции f_b и f_c. Наконец определим линейную функцию g:

$$g = r_a \cdot f_a + r_b \cdot f_b + r_c \cdot f_c.$$

Докажем, что в точках пересечения внешних касательных значение g равно 0.



Пусть X — точка пересечения внешних касательных к окружностям с центрами B и C. Так как X лежит на прямой BC, то $f_a(X) = 0$. Так как X лежит вне отрезка BC и $BX : XC = r_b : r_c$, то

$$\vec{X} = \frac{r_c}{r_c - r_b} \cdot \vec{B} + \frac{-r_b}{r_c - r_b} \cdot \vec{C}.$$

Тогда

$$g(X) = r_a \cdot f_a(X) + r_b \cdot f_b(X) + r_c \cdot f_c(X) =$$

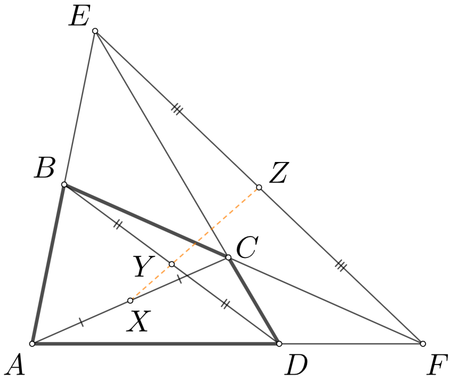
$$= r_b \cdot \left(\frac{r_c}{r_c - r_b} \cdot f_b(B) + \frac{-r_b}{r_c - r_b} \cdot f_b(C) \right) + r_c \cdot \left(\frac{r_c}{r_c - r_b} \cdot f_c(B) + \frac{-r_b}{r_c - r_b} \cdot f_c(C) \right) = 0.$$

Функция g отлична от константы:

$$g(A) = r_a \cdot f_a(A) + r_b \cdot f_b(A) + r_c \cdot f_c(A) = r_a \cdot f_a(A) = r_a \neq 0.$$

Аналогично доказывается, что значение функции g в точках пересечения других пар касательных равно 0. Следовательно, они лежат на одной прямой. □

Пример 3 (прямая Гаусса). *В четырёхугольнике $ABCD$ лучи AB и DC пересекаются в точке E, а лучи AD и BC — в точке F. Докажите, что середины отрезков AC, BD, EF лежат на одной прямой.*



Решение. Пусть X, Y, Z — середины отрезков AC, BD, EF соответственно. Рассмотрим функцию

$$f(P) = S(P, AB) - S(P, BC) + S(P, CD) - S(P, AD),$$

где каждая ориентированная площадь считается с плюсом внутри четырёхугольника. Если $P = X$, то

$$S(X, AB) = S(X, BC), \quad S(X, CD) = S(X, AD),$$

поэтому $f(X) = 0$. Аналогично $f(Y) = 0$.

Так как Z — середина отрезка EF, то $f(Z) = \frac{1}{2}\big(f(E) + f(F)\big)$. Поскольку E и A лежат по разные стороны относительно прямой BC, то $S(P, BC)$ отрицательно. Тогда

$$f(E) = -S(E, BC) - S(E, AD) = S_{BCE} - S_{ADE} = -S_{ABCD}.$$

Аналогично

$$f(F) = S(F, AB) + S(F, CD) = S_{ABF} - S_{CDF} = S_{ABCD}.$$

Таким образом, $f(E)+f(F) = 0$, то есть $f(Z) = 0$. Функция f отлична от константы, поскольку $f(E) \neq f(X)$, поэтому точки X, Y, Z лежат на одной прямой. $\square$

Упражнение (теорема Ньютона). Докажите, что если четырёхугольник $ABCD$ описанный, то центр вписанной в него окружности лежит на прямой Гаусса.

Про прямую OI

Линейные функции — один из способов работать с прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей I и O соответственно в треугольнике ABC.

Утверждение 4. *Рассмотрим уравнение*

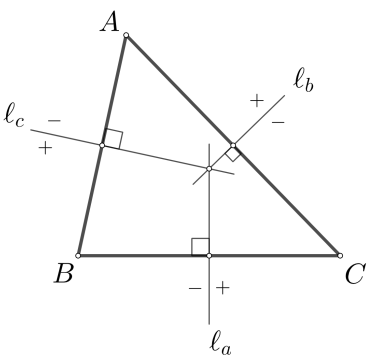
$$\rho(P, AB) + \rho(P, AC) + \rho(P, BC) = \mathrm{const},$$

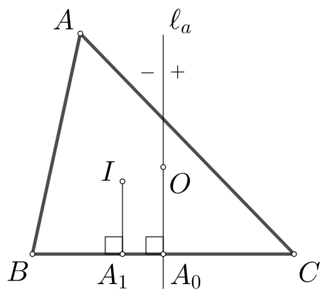
где каждое ориентированное расстояние считается с плюсом внутри треугольника. Оно задаёт прямую, перпендикулярную OI.

Доказательство. Обозначим через ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c серединные перпендикуляры к сторонам BC, AC, AB соответственно. Рассмотрим функцию

$$f(P) = \rho(P, \ell_a) + \rho(P, \ell_b) + \rho(P, \ell_c),$$

знаки выбраны так, что $\rho(C, \ell_a)$, $\rho(A, \ell_b)$, $\rho(B, \ell_c)$ положительны.





Пусть A_0 — середина стороны BC, A_1 — точка касания вписанной окружности со стороной BC. Тогда

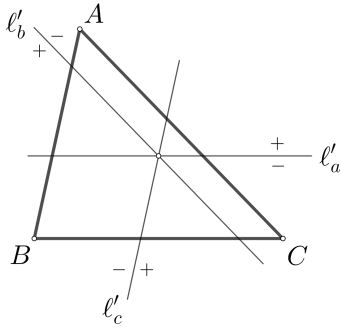
$$\rho(I, \ell_a) = CA_0 - CA_1 = \frac{a}{2} - (p - c).$$

Выразив аналогично $\rho(I, \ell_b)$, $\rho(I, \ell_c)$ и сложив, получим

$$f(I) = \rho(I, \ell_a) + \rho(I, \ell_b) + \rho(I, \ell_c) = \left(\frac{a}{2} - (p - c)\right) + \left(\frac{b}{2} - (p - a)\right) + \left(\frac{c}{2} - (p - b)\right) = 0.$$

Так как $f(O) = 0$ и функция f непостоянна (так как треугольник не равносторонний), то уравнение $f(P) = 0$ задаёт прямую OI, а, следовательно, уравнение $f(P) = \mathrm{const}$ задаёт прямую, параллельную OI.

Повернём прямые ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c относительно O на 90° против часовой стрелки и рассмотрим линейную функцию f', равную сумме ориентированных расстояний до полученных прямых ℓ'_a, ℓ'_b, ℓ'_c соответственно.



Уравнение $g = 0$ задаёт прямую, полученную из OI поворотом на $90°$. Осталось заметить, что сумма ориентированных расстояний до сторон треугольника отличается от g на константу. $\square$

Упражнение. Рассмотрим уравнение

$$\rho(P, AB) + \rho(P, AC) - \rho(P, BC) = \text{const},$$

где каждое ориентированное расстояние считается с плюсом внутри треугольника. Докажите, что оно задаёт прямую, перпендикулярную OI_a, где I_a — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC.

Задачи

1. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, лучи AD и BC в точке Q. Биссектрисы углов BAD и BCD пересекаются в точке X, биссектрисы углов ABC и ADC в точке Y, внешние биссектрисы углов APC и AQC пересекаются в точке Z. Докажите, что точки X, Y, Z лежат на одной прямой.

2. **(а)** Внутри треугольника нашлись три точки, не лежащие на одной прямой, такие, что сумма расстояний от точки до сторон одинакова для каждой из них. Что можно сказать про треугольник?
(б) Внутри выпуклого четырёхугольника нашлись три точки, не лежащие на одной прямой, такие, что сумма расстояний от точки до сторон одинакова для каждой из них. Что можно сказать про четырёхугольник?

3. На плоскости расположены несколько различных прямых. Всегда ли можно часть прямых покрасить в красный цвет, а часть — в синий так, чтобы нашлась точка, сумма расстояний от которой до красных прямых равна сумме расстояний до синих прямых?

4. Дан треугольник ABC и произвольная точка X. В треугольнике проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что площадь одного из треугольников XAA_1, XBB_1, XCC_1 равна сумме двух других.

5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. С центром в точке B построена окружность ω_b радиуса $BB_1/2$; с центром в точке C построена окружность ω_c радиуса $CC_1/2$. Прямая ℓ — общая внешняя касательная к окружностям ω_b и ω_c, не пересекающая треугольник ABC. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника, образованного прямыми AB, AC и ℓ, лежит на отрезке BC.

6. Пусть O и I — центры описанной и вписанной окружностей соответственно, I_a — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC.
(а) Докажите, что основания внешних биссектрис лежат на прямой, перпендикулярной OI.
(б) Пусть I_a — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Докажите, что прямая OI_a перпендикулярна прямой B_1C_1.

7. На сторонах AB и AC треугольника ABC нашлись точки X и Y соответственно такие, что $BX = BC = CY$. Докажите, что XY перпендикулярно прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC.

8. В треугольнике ABC точки I и O — центры вписанной и описанной окружностей соответственно. Прямая, проходящая через I перпендикулярно OI, пересекает BC в точке X, а внешнюю биссектрису угла A — в точке Y. В каком отношении I делит отрезок XY?

9. В неравностороннем треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, а точка O — центр описанной окружности. Прямая s проходит через I

и перпендикулярна прямой IO. Прямая ℓ, симметричная прямой BC относительно s, пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно (K и L отличны от A). Докажите, что центр описанной окружности треугольника AKL лежит на прямой IO.

10. Треугольники ABC и $A'B'C'$ имеют общую описанную и вписанную окружности. Докажите, что для любой точки P, лежащей внутри обоих треугольников, сумма расстояний от P до сторон треугольника ABC равна сумме расстояний от P до сторон треугольника $A'B'C'$.

11. Внутри правильного n-угольника взята точка X, проекции которой на все стороны попадают во внутренние точки сторон. Этими точками стороны разделяются на $2n$ отрезков. Покрасим эти отрезки в шахматном порядке в красный и синий цвета.

(а) Докажите, что сумма длин красных отрезков равна сумме длин синих отрезков.

(б) Докажите, что сумма площадей треугольников с вершиной в точке X и основанием в красных отрезках равна сумме площадей аналогичных синих треугольников.

Подсказка: в пункте (б) нужно ввести не линейную функцию.

12. Докажите, что площадь выпуклого пятиугольника $ABCDE$ меньше суммы площадей треугольников ABC, BCD, CDE, DEA, EAB.

13. Каждой стороне b выпуклого многоугольника P поставим в соответствие наибольшую из площадей треугольников, содержащихся в P, одна из сторон которых совпадает с b. Докажите, что сумма площадей, соответствующих всем сторонам P, не меньше удвоенной площади многоугольника P.

14. У тетраэдра $ABCD$ сумма площадей двух граней с общим ребром AB равна сумме площадей граней с общим ребром CD. Докажите, что середины ребер BC, AD, AC и BD лежат в одной плоскости, причём эта плоскость содержит центр сферы, вписанной в тетраэдр $ABCD$.

15. Даны три треугольника: $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$. Известно, что их точки пересечения медиан лежат на одной прямой, а никакие три из девяти вершин этих треугольников не лежат на одной прямой. Рассматриваются 27 треугольников вида $A_iB_jC_k$, где i, j, k независимо пробегают значения 1, 2, 3. Докажите, что эти 27 треугольников можно разбить на две группы так, что сумма площадей треугольников первой группы будет равна сумме площадей треугольников второй группы.