Счёт в синусах 2

1. Пусть дан угол $\angle ABC\ <\pi$ и точка X внутри него. Докажите, что луч BX однозначно задаётся отношением синусов углов $\frac{\sin\angle ABX}{\sin\angle CBX}$.

2. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка P таким образом, что $\angle PAD=\angle PCD$. Докажите, что $\angle PBC=\angle PDC$.

3. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC во внешнюю сторону построены треугольники BCD, CAE, ABF так, что

$$\angle BCD=\angle ECA=\varphi,\ \angle CAE=\angle BAF=\theta,\ \angle CBD=\angle ABF=\psi.$$

Докажите, что прямые AD, BE, CF конкурентны.

4. В треугольнике ABC через внутреннюю точку X проведены чевианы AD, BE, CF. В сегмент, отсекаемый прямой AC от описанной окружности ω треугольника ABC (не содержащий точку B), вписана окружность, касающаяся AC в точке E и ω в точке B_1. Аналогично определяются точки A_1 и C_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 конкурентны.

5. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту AH и диаметр AD описанной окружности. Точка I — центр вписанной окружности. Докажите, что $\angle BIH=\angle CID$.

6. **Теорема Морлея.** В треугольнике ABC проведены трисектрисы (лучи, делящие углы на три равные части). Ближайшие к стороне BC трисектрисы углов B и C пересекаются в точке A_1; аналогично определим точки B_1 и C_1. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ равносторонний.

7. Пусть $ABCD$ — вписанный четырёхугольник такой, что $\angle BAD\leqslant\angle ADC$. Докажите, что $AC+CD\leqslant AB+BD$.

8. В треугольнике ABC проведена биссектриса AA_0, на отрезке AA_0 выбрана точка X. Прямая BX пересекает AC в точке B_0, а прямая CX пересекает AB в точке CC_0. Отрезки A_0B_0 и CC_0 пересекаются в точке P, а отрезки A_0C_0 и BB_0 пересекаются в точке Q. Докажите, что углы $\angle BAQ$ и $\angle CAP$ равны.

9. Точка X лежит внутри треугольника ABC. Докажите, что один из углов $\angle XAB$, $\angle XBC$, $\angle XCA$ не больше 30°.

[ЦПМ, кружок по математике, 9 класс] Святный И. К.
[2024–2025] группа 9 класс *10 марта 2025*

Счёт в синусах 2

1. Пусть дан угол $\angle ABC\ <\pi$ и точка X внутри него. Докажите, что луч BX однозначно задаётся отношением синусов углов $\frac{\sin\angle ABX}{\sin\angle CBX}$.

2. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка P таким образом, что $\angle PAD=\angle PCD$. Докажите, что $\angle PBC=\angle PDC$.

3. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC во внешнюю сторону построены треугольники BCD, CAE, ABF так, что

$$\angle BCD=\angle ECA=\varphi,\ \angle CAE=\angle BAF=\theta,\ \angle CBD=\angle ABF=\psi.$$

Докажите, что прямые AD, BE, CF конкурентны.

4. В треугольнике ABC через внутреннюю точку X проведены чевианы AD, BE, CF. В сегмент, отсекаемый прямой AC от описанной окружности ω треугольника ABC (не содержащий точку B), вписана окружность, касающаяся AC в точке E и ω в точке B_1. Аналогично определяются точки A_1 и C_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 конкурентны.

5. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту AH и диаметр AD описанной окружности. Точка I — центр вписанной окружности. Докажите, что $\angle BIH=\angle CID$.

6. **Теорема Морлея.** В треугольнике ABC проведены трисектрисы (лучи, делящие углы на три равные части). Ближайшие к стороне BC трисектрисы углов B и C пересекаются в точке A_1; аналогично определим точки B_1 и C_1. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ равносторонний.

7. Пусть $ABCD$ — вписанный четырёхугольник такой, что $\angle BAD\leqslant\angle ADC$. Докажите, что $AC+CD\leqslant AB+BD$.

8. В треугольнике ABC проведена биссектриса AA_0, на отрезке AA_0 выбрана точка X. Прямая BX пересекает AC в точке B_0, а прямая CX пересекает AB в точке CC_0. Отрезки A_0B_0 и CC_0 пересекаются в точке P, а отрезки A_0C_0 и BB_0 пересекаются в точке Q. Докажите, что углы $\angle BAQ$ и $\angle CAP$ равны.

9. Точка X лежит внутри треугольника ABC. Докажите, что один из углов $\angle XAB$, $\angle XBC$, $\angle XCA$ не больше 30°.