

Спуск в теории чисел

1. Решите в целых числах уравнение $x^3 + 3y^3 + 9z^3 = 3xyz$.
2. Докажите, что никакое число вида $4^n(8k + 7)$ не представимо в виде суммы трёх квадратов целых чисел.
3. Решите в целых числах уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2xyzt$.
4. Решите в целых числах уравнение $x^4 + y^4 + z^4 = 9u^4$.
5. (а) Имеется 101 корова, каждая весит натуральное число граммов. Известно, что любые 100 из них можно разбить на 2 стада одинакового веса по 50 коров в каждом. Докажите, что все коровы весят одинаково.
(б) Докажите то же самое, если веса коров рациональны.
6. Решите в целых числах уравнение $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$.
7. Пусть a_1, a_2, \dots, a_{64} — произвольный набор натуральных чисел. Докажите, что если образовать из него новый набор b_1, b_2, \dots, b_{64} по правилу $b_k = |a_{k+1} - a_k|$, $k = 1, 2, \dots, 64$, $a_{65} = a_1$, затем из набора b_1, b_2, \dots, b_{64} образовать новый набор, и так далее, то через несколько шагов мы придём к набору, состоящему из одних нулей.
8. Докажите, что если натуральное число делится на 10101010101, то его десятичная запись содержит хотя бы 6 ненулевых цифр.
9. (а) Докажите, что если натуральные числа x, y, z являются решением уравнения $x^2 + y^2 + 1 = xyz$, то $z = 3$.
(б) Найдите все решения этого уравнения в натуральных числах.