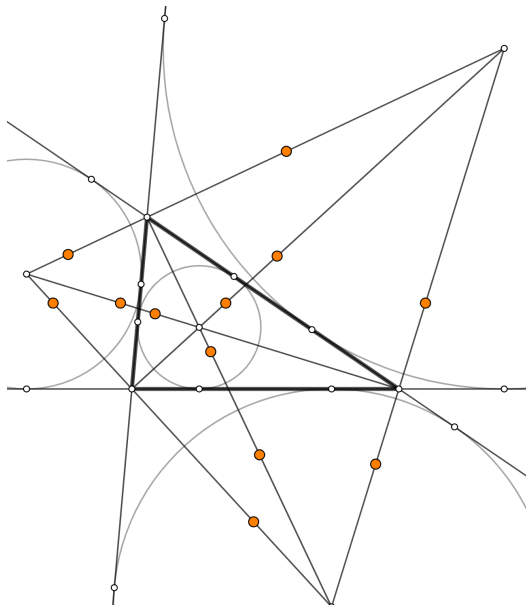


Задача $2^8 - 1$

- Задача 255.** Пусть X — проекция вершины C на биссектрису угла B треугольника ABC . Докажите, что
 - X лежит на средней линии, параллельной стороне AB ;
 - X лежит на прямой, соединяющей точки касания вписанной окружности со сторонами AB и AC ;
 - X лежит на прямой, соединяющей точки касания вневписанной окружности со стороной AC и продолжением стороны AB .
- Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для прямой, соединяющей точки касания вневписанной окружности с продолжениями сторон.
- Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB , касается его сторон в точках A_1 , B_1 и C_1 . Пусть B_1H — высота треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что точка H лежит на средней линии треугольника ABC .
- Докажите, что проекции вершин B и C на биссектрису угла A и точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной BC лежат на одной окружности.
 - Докажите, что проекции вершин B и C на биссектрису угла A , основание высоты из вершины A и середина стороны BC лежат на одной окружности.
- К двум неравным окружностям проведены общая внешняя и общая внутренняя касательные. Докажите, что прямая, соединяющая две точки касания на первой окружности и прямая, соединяющая две точки касания на второй окружности, пересекаются на линии центров этих окружностей.
- В треугольник ABC вписана окружность. Известно, что прямая, соединяющая её точки касания со сторонами AB и AC , проходит через середины малых дуг AB и AC . Найдите угол A .
 - Пусть точки M , N , P , Q — середины дуг BAC , CBA , BC , AC соответственно окружности (ABC) . Вневписанные окружности касаются сторон BC и AC в точках A_1 и B_1 соответственно. Оказалось, что A_1 лежит на отрезке NP . Докажите, что B_1 лежит на отрезке MQ .

7. Отметим 12 точек, которые описывает конфигурация задачи 255 (кстати, почему их 12?). Докажите, что среди них можно четырьмя способами выбрать 6 точек, лежащих на одной окружности.



8. (а) Точки X и Y — проекции вершины A на биссектрисы углов B и C треугольника ABC соответственно. Вписанная окружность с центром в точке I касается стороны BC в точке A_1 . Докажите, что AXA_1Y — параллелограмм.
- (б) Прямая, соединяющая точки касания вневписанной окружности со стороной AB и продолжением стороны BC , пересекается в точке Z с прямой, соединяющей точки касания другой вневписанной окружности со стороной AC и продолжением стороны BC . Докажите, что $IXZY$ — параллелограмм. Выведите отсюда, что Z лежит на высоте AH треугольника ABC . Чему равно AZ ?
- (в) Прямая, соединяющая точки касания вписанной окружности со сторонами AB и BC , пересекается с прямой, соединяющей точки касания вневписанной окружности со стороной BC и продолжением стороны AC , в точке T . Докажите, что T лежит на AH . Чему равно AT ?
- (г) Найдите две аналогичные точки на прямой AH .
9. На продолжении стороны BC треугольника ABC за точку B отмечена точка X . Вписанные окружности треугольников ABX и ACX пересекаются в точках P и Q . Докажите, что все прямые PQ проходят через фиксированную точку, не зависящую от выбора точки X .