Счёт в синусах

Памятка
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$, $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$;
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$, $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$;
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$.

Теорема Чевы в синусной форме. Дан треугольник ABC. Прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sin\angle(AB, AA_1)}{\sin\angle(AA_1, AC)} = \frac{\sin\angle(CA, CC_1)}{\sin\angle(CC_1, CB)} \cdot \frac{\sin\angle(BC, BB_1)}{\sin\angle(BB_1, BA)} = 1.$$

1. В треугольнике ABC провели **(а)** высоты **(б)** биссектрисы. Выразите длины **всех** получившихся отрезков через $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$ и радиус описанной окружности R.

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Точка O — центр описанной окружности. Докажите, что расстояние от точки A_1 до прямой BO равно расстоянию от точки B_1 до прямой AO.

3. В треугольнике с тупым углом A проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что отрезок, соединяющий проекции точки B_1 на прямые BA и BC равен отрезку, соединяющему проекции точки C_1 на прямые CA и CB.

4. Внутри угла с вершиной O отмечена точка P. Рассматриваются всевозможные пары точек X и Y на сторонах угла такие, что $\angle OPX = \angle OPY$. Докажите, что все прямые XY проходят через одну точку.

5. Точка X лежит внутри правильного треугольника ABC. Точки A_1, B_1, C_1 симметричны точке X относительно сторон BC, AC, AB соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

6. Две окружности радиусов r и R касаются прямой в точках A и B. Пусть C — одна из точек пересечения этих окружностей. Докажите, что радиус описанной окружности треугольника ABC не зависит от положения окружностей.

7. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что треугольник с вершинами в ортоцентрах треугольников AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 равен треугольнику $A_1B_1C_1$.

8. Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке N. Касательная к внутренней окружности, проведённая в точке K, пересекает внешнюю окружность в точках A и B. Пусть M — середина дуги AB, не содержащей точку N. Докажите, что радиус описанной окружности треугольника BMK не зависит от выбора точки K на внутренней окружности.

9. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC выбраны точки C_1, A_1, B_1 соответственно. Оказалось, что центры вписанных окружностей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают, а радиус вписанной окружности в треугольник $A_1B_1C_1$ вдвое меньше, чем радиус окружности треугольника ABC. Докажите, что треугольник ABC правильный.