Основная теорема алгебры

Основная теорема алгебры. Всякий многочлен с комплексными коэффициентами, отличный от константы, имеет по крайней мере один комплексный корень.

Следствие. Ненулевой многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней с учётом кратности.

Ясно, что достаточно доказать теорему для приведённого многочлена. Пусть наш многочлен имеет вид $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_1 z + a_0$. Далее будем считать, что $a_0 \neq 0$ (иначе утверждение очевидно).

Определения. Точку z^n на комплексной плоскости назовём Дамой, а точку $P(z)$ — Собачкой. Пусть R — некоторое положительное число. Дама держит Собачку на поводке, причём длиной поводка назовём следующее выражение: $L = R^n$. Число R_0 определим как $R_0 = |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \ldots + |a_1| + |a_0| + 1$. Точка O — центр комплексной плоскости.

1. **(а)** Число z начинает свой путь по комплексной плоскости в точке R, проходит один раз по окружности с центром в O радиуса R против часовой стрелки и возвращается в ту же точку. Докажите, что Дама движется по окружности радиуса L и обходит её ровно n раз.
(б) Пусть $R = R_0$. Докажите, что расстояние между Дамой и Собачкой $|P(z) - z^n|$ меньше, чем длина поводка.

Траектория Собачки — непрерывная линия, начинающаяся и заканчивающаяся в точке $P(R_0)$. Из предыдущего пункта следует, что на своём пути Собачка, как и Дама, n раз обходит вокруг точки O. Начнём стягивать радиус начальной окружности от R_0 до нуля. Радиус окружности, по которой гуляет Дама, уменьшается, но она по-прежнему будет проходить n раз вокруг точки O. Траектория движения Собачки меняется непрерывно, и при радиусе, близком к нулю, она близка к точке a_0.

2. Рассмотрев функцию от переменной R, равную числу обходов Собачки вокруг точки O, докажите, что при некотором значении радиуса Собачка будет вынуждена пройти через O. Выведите отсюда ОТА.

3. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ с вещественными коэффициентами существует набор многочленов с вещественными коэффициентами $Q_i(x)$, $\deg Q_i \leqslant 2$ такой, что $P(x) = Q_1(x) \cdot Q_2(x) \cdot \ldots \cdot Q_n(x)$.

4. Пусть $P(x)$ — многочлен с вещественными коэффициентами, такой что для любого вещественного x выполняется $P(x) \geqslant 0$. Докажите, что найдутся многочлены $A(x)$ и $B(x)$ с вещественными коэффициентами такие, что $P(x) = A(x)^2 + B(x)^2$.

5. Докажите, что многочлен $x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1$ делится на многочлен $x^4+x^3+x^2+x+1$ в смысле делимости многочленов с вещественными коэффициентами.

6. Дан приведённый многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами такой, что $|P(i)| < 1$. Докажите, что существуют вещественные числа a, b, такие что $P(a+bi) = 0$ и $(a^2 + b^2 + 1)^2 < 4b^2 + 1$.

7. Найдите все многочлены $P(x)$ с вещественными коэффициентами, такие что $P(x)P(2x^2) = P(2x^3 + x)$.