Комплексные числа. Продолжение

Тригонометрической записью комплексного числа z называется его представление в виде $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Здесь $r = |z|$, а число φ называется **аргументом** комплексного числа и обозначается $\varphi = \operatorname{Arg}(z)$.

1. Докажите, что при умножении (делении) комплексных чисел их модули перемножаются (делятся), а аргументы складываются (вычитаются). Выведите отсюда *формулу Муавра*:

$$z^n = \Big(r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\Big)^n = r^n\,\Big(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\Big).$$

Корнями n-ой степени из числа $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называются решения уравнения $w^n = z$. Этих решений ровно n штук, и они имеют вид

$$w_k = r^{1/n}\,\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right),\quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

2. Вычислите значения выражений:
(а) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{100}$ **(б)** $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{n}$ **(в)** $\sqrt[6]{-729}$.

3. Найдите, чему равна сумма корней n-ой степени из z.

4. Вычислите суммы:
(а) $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \ldots$
(б) $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots$
(в) $\cos(\varphi) + \cos(2\varphi) + \ldots + \cos(n\varphi)$ и $\sin(\varphi) + \sin(2\varphi) + \ldots + \sin(n\varphi)$.

5. Вещественные числа α, β, γ таковы, что $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0$, $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0$. Докажите, что $\cos(2\alpha) + \cos(2\beta) + \cos(2\gamma) = 0$ и $\sin(2\alpha) + \sin(2\beta) + \sin(2\gamma) = 0$.

6. Докажите неравенство:

$$|z_1 - z_2| \leqslant \big||z_1| - |z_2|\big| + 2\min\{|z_1|, |z_2|\}\left|\sin\left(\frac{\operatorname{Arg}(z_1) - \operatorname{Arg}(z_2)}{2}\right)\right|.$$

7. Дано комплексное число z, такое что $|z| = 1$. Докажите, что

$$\sqrt{2} \leqslant |1 - z| + |1 + z^2| \leqslant 2.$$

8. Пусть $M \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ — множество, удовлетворяющее свойству: если $x, y \in M$, то $\frac{x}{y} \in M$. Известно, что M состоит из n элементов. Найдите M.