Окружность Аполлония

Утверждение. Пусть фиксированы точки A и B и положительное число $k \neq 1$. Тогда геометрическим местом точек X таких, что $AX : XB = k$ является окружность. Она называется *окружностью Аполлония.*

В контексте треугольника можно рассматривать окружность Аполлония для точек B и C и $k = BA/CA$ (будем называть её A-окружностью Аполлония) и две аналогичных окружности.

Теория

1. **(а)** Докажите, что три окружности Аполлония треугольника ABC имеют две общие точки (они называются *точками Аполлония*).
(б) Докажите, что точки пересечения касательных к описанной окружности треугольника в вершинах с противоположными сторонами лежат на одной прямой.
(в) Докажите, что точки Аполлония инверсны относительно описанной окружности.

2. Докажите, что прямая, проходящая через точки Аполлония треугольника ABC, проходит через
(а) центр (ABC);
(б) точку Лемуана треугольника (точку пересечения симедиан);
(в) ортоцентр треугольника с вершинами в основаниях внутренних биссектрис треугольника.

3. **(а)** Обозначим одну из точек Аполлония треугольника ABC через P. Прямые AP, BP, CP пересекают описанную окружность в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ правильный.
(б) Точки A_2, B_2, C_2 — проекции точки Аполлония на стороны треугольника ABC. Докажите, что треугольник $A_2B_2C_2$ правильный. Верно ли обратное утверждение: если треугольник с вершинами в проекциях точки X на прямые AB, AC, BC правильный, то X — одна из точек Аполлония?

4. Углы треугольника меньше $120°$. Докажите, что одна из точек Аполлония треугольника изогонально сопряжена его точке Торричелли (то есть точке, из которой стороны треугольника видны под углами $120°$).

5. Докажите, что точка P принадлежит A-окружности Аполлония тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$\measuredangle APB - \measuredangle ACB = \measuredangle CPA - \measuredangle CBA.$$

Задачи

6. Дан треугольник ABC. Точки M и N таковы, что

$$AM : BM : CM = AN : BN : CN.$$

Докажите, что прямая MN проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.

7. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC выбраны точки P и Q так, что $\angle BPC = \frac{3}{2}\angle BAC$, $BP = AQ$ и $AP = CQ$. Докажите, что $AP = PQ$.

8. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ таков, что $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Докажите, что

$$\angle BAC + \angle CBD + \angle DCA + \angle ADB = 180^\circ.$$