

Раскраска плоскости

Если в задаче говорится, что плоскость покрашена в n цветов, то имеется в виду, что каждая точка окрашена в один из n цветов, причём каждым из этих n цветов покрашена хотя бы одна точка плоскости.

1. Плоскость покрашена в два цвета. Докажите, что найдутся две точки
(а) одного цвета; (б) разных цветов,
расстояние между которыми равно 1.
2. Прямая покрашена в два цвета. Докажите, что найдётся отрезок, оба конца и середина которого покрашены в один и тот же цвет.
3. Плоскость покрашена в два цвета. Докажите, что найдётся правильный треугольник со стороной 1 или $\sqrt{3}$ с одноцветными вершинами.
4. Можно ли покрасить плоскость в три цвета так, чтобы любая прямая оказалась покрашена ровно в два цвета?
5. При каком наименьшем n полосу ширины 0,01 (то есть множество точек между двумя параллельными прямыми на расстоянии 0,01) можно покрасить в n цветов так, чтобы любые две точки на расстоянии 1 были покрашены в разные цвета?
6. Плоскость покрашена в 100 цветов. Докажите, что найдётся прямоугольник, вершины которого покрашены в один цвет.
7. Плоскость покрашена в 100 цветов.
(а) Докажите, что найдётся прямоугольный треугольник с вершинами трёх разных цветов.
(б) Докажите, что найдётся равнобедренный прямоугольный треугольник с вершинами одного цвета.
8. (а) Плоскость покрашена в три цвета. Докажите, что найдётся треугольник площади 1 с вершинами одного цвета.
(б) Верно ли утверждение из предыдущего пункта, если плоскость покрашена в 100 цветов?